

Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

Examen

Criterios de Corrección y Calificación



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

NAZIOARTEKO
BIKAIN TASUN
CAMPUSA

CAMPUS DE
EXCELENCIA
INTERNACIONAL



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2013ko EKAINA

MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2013

MATEMÁTICAS II

Azterketa honek bi aukera ditu. Horietako bati erantzun behar diozu. Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.



OPCIÓN A

Ejercicio A1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real,

- Calcular razonadamente el rango de la matriz A en función del parámetro a .
- Explicar si la matriz tiene inversa para el caso $a = 1$ y en caso de que exista calcularla.

Ejercicio A2

Considera la recta r definida por $\frac{x-2}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{2}$ y el plano $2x - y + bz = 0$.

Determinar los valores de a y b en los siguientes casos:

- La recta r es perpendicular al plano
- La recta r está contenida en el plano

Ejercicio A3

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 6}$. Obtener razonadamente:

- El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$
- Realizar un dibujo aproximado de la gráfica de dicha función

Ejercicio A4

La parábola $y = (1/2)x^2$ divide al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(4, 2)$ y $(0,2)$ en dos recintos.

Calcular el área de cada uno de los recintos.

Ejercicio A5

El número $50! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 48 \cdot 49 \cdot 50$

¿En cuántos ceros acaba?



OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dado el sistema

$$\begin{cases} mx + my + 2z = m \\ x + (m-2)y = -1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

- Discutirlo según los valores del parámetro m .
- Resolverlo, si es posible, para $m = 5$.

Ejercicio B2

Sean $A=(2,1,0)$ y π el plano de ecuación $2x + 3y + 4z = 0$.

- Hallar el punto de π de mínima distancia al punto A y hallar dicha distancia.
- Encontrar el punto B simétrico de A respecto al plano π .

Ejercicio B3

Se divide un segmento de longitud 200 cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos con la condición que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Ejercicio B4

Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{ax+b}{x^2-3x+2} dx$$

en función de a y de b .

Ejercicio B5

En la sucesión de los 210 primeros números naturales:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, 210$$

se suprimen los múltiplos de 7. Calcular razonadamente la suma de los términos restantes.



MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- a) La discusión del rango se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.
- b) El cálculo de la matriz inversa para el caso $a = 1$, se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.

Problema A.2 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

Cada uno de los apartados se valorará hasta con 1 punto como máximo

Problema A.3 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- a) El cálculo correcto del dominio y las asíntotas se valorará hasta 0,5 puntos.
- b) La obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.
- c) Por último, el dibujo de la curva se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.

Problema A.4 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- a) El dibujo correcto del recinto total se valorará hasta con 0,75 puntos como máximo
- b) El cálculo del área de cada recinto, aplicando el Teorema de Barrow. Se valorará hasta 1,25 punto como máximo

Problema A.5 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- La realización de un buen esquema de representación o una explicación aclaratoria de la situación se valorará hasta 0,75 puntos como máximo.
- El cálculo correcto de la solución del problema se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.



MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- a) La discusión del rango se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.
- b) El cálculo de la matriz inversa para el caso $a = 1$, se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.

Problema A.2 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

Cada uno de los apartados se valorará hasta con 1 punto como máximo

Problema A.3 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- a) El cálculo correcto del dominio y las asíntotas se valorará hasta 0,5 puntos.
- b) La obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.
- c) Por último, el dibujo de la curva se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.

Problema A.4 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- a) El dibujo correcto del recinto total se valorará hasta con 0,75 puntos como máximo
- b) El cálculo del área de cada recinto, aplicando el Teorema de Barrow. Se valorará hasta 1,25 punto como máximo

Problema A.5 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- La realización de un buen esquema de representación o una explicación aclaratoria de la situación se valorará hasta 0,75 puntos como máximo.
- El cálculo correcto de la solución del problema se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.



OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- Calcular con corrección el determinante de cada matiz se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos
- Discutir el sistema en función del parámetro m , hasta 1 punto como máximo
- Resolverlo en el caso $m=5$, hasta 0,5 puntos como máximo.

Problema B.2 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- La obtención de la recta perpendicular al plano se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos
- La obtención del punto intermedio se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos
- La obtención del punto simétrico se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos.
- La obtención de la distancia al plano se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos.

Problema B.3 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- El planteamiento correcto del problema hasta un máximo de 1 punto
- Obtención de la solución aplicando los criterios de la derivada hasta un máximo de 1 punto.

Problema B.4 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- La descomposición de la integral en integrales sencillas y el cálculo de los parámetros adecuados se valorará hasta 2 puntos.

Problema B.5 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- El cálculo de la suma de todos los números se valorará hasta un máximo de 1 puntos.
- El cálculo de la suma de los múltiplos de 7 y el resultado final del problema se valorará hasta un máximo de 1 punto



SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio A1

- a) El determinante de la matriz es igual a $-a(a^2 + 1)$. Por tanto para $a \neq 0$ Rango(A) es igual a 3. Para $a = 0$, Rango(A) es igual a 2 por existir un menor de dimensión 2 con determinante distinto de cero.
- b) Para $a = 1$ existe inversa y su valor es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A2

- a) Si la recta y el plano son perpendiculares, entonces el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos, luego sus componentes son proporcionales, esto es :

$$\frac{a}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{b}, \text{ de donde } a = -8 \text{ y } b = -\frac{1}{2}.$$

- b) Para que la recta esté contenida en el plano, el vector director de la recta y el normal del plano han de ser perpendiculares y además un punto cualquiera de la recta debe pertenecer al plano. Al imponer la condición de que el punto P(2, 1, -1) pertenece al plano tenemos

$$2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + b(-1) = 0$$

de donde $b = 3$.

Si ahora imponemos la condición de perpendicularidad de los vectores tenemos:

$$a \cdot 2 + 4(-1) + 2(3) = 0, \text{ de donde } a = -1.$$

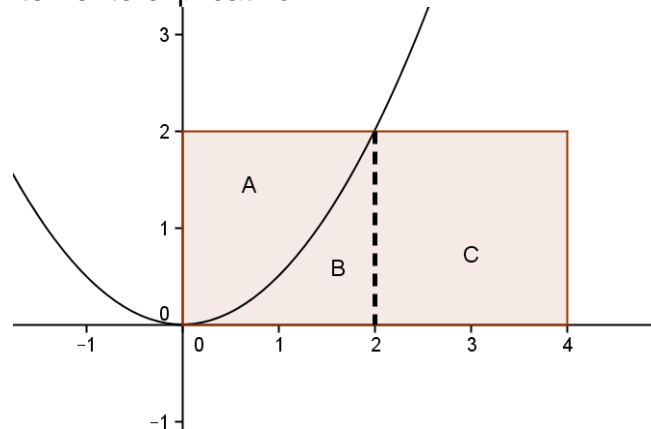
Ejercicio A3

- a) La función no existe en los ceros del denominador, por tanto su dominio es toda la recta real menos los valores 2 y 3. Tiene como asíntotas
Horizontales $y = 0$, tanto en más infinito como en menos infinito.
Verticales $x = 2$ y $x = 3$
Oblicuas : No tiene

b) La primera derivada es $f'(x) = \frac{10-4x}{(x^2-5x+6)^2}$. Al tener dos asíntotas verticales, la función es creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \frac{5}{2})$, y decreciente en los intervalos $(\frac{5}{2}, 3)$ y $(3, +\infty)$.

Ejercicio A4

El recinto es suficientemente explicativo



El área de todo el rectángulo es igual a 8 unidades cuadradas, la región C tiene 4 unidades cuadradas, mientras que el área de la región B es igual a :

$$B = \int_0^2 0,5x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Por tanto la parábola divide al rectángulo en dos regiones, que son B+C y A de áreas respectivamente $16/3$ unidades cuadradas y $8/3$ unidades cuadradas.

Ejercicio A5

En la factorización de número $50!$ aparecen en total 12 cincos que provienen de los 10 múltiplos de 5, teniendo en cuenta además que 25 y 50 aportan dos cincos. Doses aparecen en cantidad suficiente para generar los doce últimos ceros.



SOLUCIONES

OPCIÓN B

Ejercicio B1

El determinante de la matriz de coeficientes es $2(m-1)(m-2)$. Por tanto para m distinto de 1 y de 2 el sistema es compatible determinado.

Para $m=1$ los rangos de la matriz y de la matriz ampliada son iguales a 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado.

En el caso $m=2$ los rangos son diferentes por lo que resulta un sistema incompatible.

Para $m=5$ la solución es $(x,y,z)=(1, -2/3, 5/3)$.

Ejercicio B2

El método consistirá en encontrar una recta perpendicular al plano y que pase por el punto A; el punto de corte de dicha recta con el plano nos dará un punto que divide al segmento AB en dos partes iguales, siendo B el punto simétrico de A respecto al plano. La recta perpendicular es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}.$$

La intersección de dicha recta con el plano nos da el punto

$$C(44/29, 8/29, -28/29).$$

El punto simétrico B será por tanto igual a $B(30/29, -13/29, -56/29)$. La distancia del plano al punto C es igual a:

$$\frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{29}}.$$

Ejercicio B3

Si las dimensiones del cuadrado son x y las del rectángulo son $2y$ e y respectivamente hay que minimizar la relación

$$A = x^2 + 2y^2.$$

Como $4x+6y = 200$, despejando el valor de x de esta expresión e

introduciéndolo en M tenemos que $M = \left(\frac{100-3y}{2}\right)^2 + 2y^2$. Para minimizar M

derivamos con respecto a la variable y e imponemos la condición de mínimo,

obteniendo $M' = \frac{17y-300}{2} = 0$, de donde $y = 300/17$ cm, mientras que $x =$

400/17 cm.

Ejercicio B4

Se toma la siguiente descomposición en fracciones simples:



**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

$$\frac{ax+b}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Realizando las operaciones adecuadas, tenemos que $A = -(a+b)$ y $B = 2a+b$.
Por tanto

$$\int \frac{ax+b}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{-(a+b)}{x-1} dx + \int \frac{2a+b}{x-2} dx = -(a+b) \ln |x-1| + (2a+b) \ln |x-2| + C.$$

Ejercicio B5

La suma de todos los términos (incluidos los múltiplos de 7) es igual a

$$\left(\frac{1+210}{2} \right) 210 = 22\,155.$$

La suma de los múltiplos de 7 es igual

$$7+2\cdot 7+\dots+30\cdot 7=7(1+2+\dots+30)=3255.$$

Por tanto la suma pedida es

$$22155 - 3255 = 18900.$$