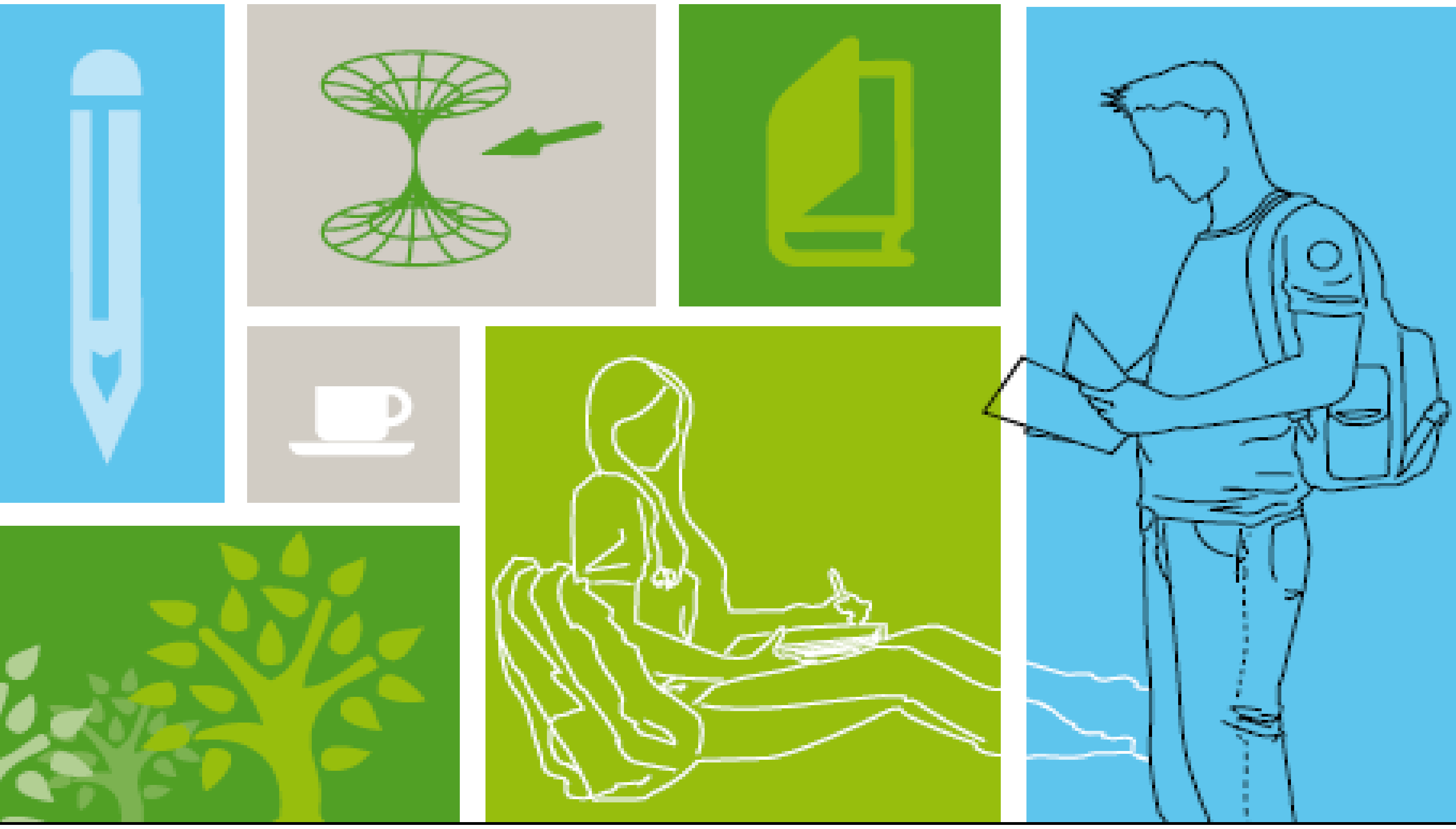
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD · 2013

Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

Examen

Criterios de Corrección y Calificación



Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

NAZIOARTEKO BIKAINTASUN CAMPUSA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK | *PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2013ko UZTAILA | *JULIO 2013*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

Azterketa honek bi aukera ditu. Horietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ ay - z = -1 \\ x + 2ay = 0 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los distintos valores de *a*.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio A2

Dados el punto *P* (1,0, -2) y la recta *r* definida por $\begin{cases} 2x + y - 4z = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

a) Determina la recta que corta a *r*, es perpendicular a *r* y pasa por el punto *P*.
b) Halla la distancia entre el punto *P* y su simétrico *Q* respecto de la recta *r*

Ejercicio A3

Una franquicia de tiendas de electrónica ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas *n* que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión:

$$B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24)\ .$$

Determina razonadamente:
a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios semanales.
b) El valor de dichos beneficios máximos.

Ejercicio A4

Dadas las tres funciones: $f(x) = 1/x$, $g(x) = 9x$, $h(x) = 25x$
a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las tres gráficas.
b) Calcular el área de dicho recinto.

Ejercicio A5

El número $N = 3^{120} \times 7^{140}$ es muy grande. ¿Sabrías obtener el dígito correspondiente a las unidades? Razónalo.

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{pmatrix}$$

a) Estudia el rango de *A* en función de los valores del parámetro *m*.
b) Para *m* = 0 halla la matriz inversa de *A*.

Ejercicio B2

Se consideran los puntos *A*=(1, -1, 0) y *B*=(2,0, 3).
a) ¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta que une *A* y *B* y que además pase por el punto *C*= (2, 2, 3)? En caso afirmativo hallar la ecuación de dicho plano, en caso negativo razonar la respuesta.
b) ¿Es posible encontrar una recta que pase por *A*, *B* y *C*? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta, en caso negativo razonar la respuesta.

Ejercicio B3

Dada la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

a) Hallar los valores de los parámetros *A*, *B* y C para que *f* tenga un extremo en *x* = 0 y otro en *x* = 2. ¿Son únicos dichos parámetros?
b) Determinar de qué tipo de extremo se trata (máximo o mínimo).
c) Representar *f* en el caso *C*=0.

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular las siguientes integrales

$$\int x \ln(x)\, dx \quad \text{y} \quad \int x \cos(2x)\, dx .$$

Ejercicio B5

La suma de 25 múltiplos seguidos de 13 es 7150 .
¿Cuál es el primer múltiplo de 13 que aparece en dicha suma?
¿Cuál es el último múltiplo de 13 que aparece en dicha suma?

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:
a) La discusión del sistema se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.
b) La resolución completa para el caso que se señala se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos

Problema A.2 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:
La obtención de la recta perpendicular al plano se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos
La obtención del punto intermedio se valorará hasta un máximo de 0,5puntos
La obtención del punto simétrico se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos
La distancia entre los puntos se valorará hasta 0,5 puntos.

Problema A.3 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:
El planteamiento del problema y la obtención de los puntos extremos de la función objetivo se valorará hasta un máximo de 1 punto.
La obtención de la solución discutiendo el tipo de extremo se valorará hasta un máximo de 1 punto.

Problema A.4 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:
a) La obtención correcta del recinto, con sus correspondientes gráficas se valorará hasta con 1 punto.
b) La obtención del área del recinto aplicando el teorema de Barrow se valorará hasta 1 punto.

Problema A.5 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:
- La realización de un buena explicación aclaratoria de la situación (esquema, tabla, razonamiento, etc) se valorará hasta 0,75 puntos como máximo.
- El cálculo correcto de la solución del problema se valorará hasta un máximo de 1,25 puntos.

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

a) La obtención correcta del determinante, en función de m, y su discusión posterior del rango se valorará hasta un máximo de 1, 25 puntos.
b) La obtención de la matriz inversa se valorará hasta un máximo de 0, 75 puntos.

Problema B.2 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:
Cada uno de los apartados se valorará hasta un máximo de 1 punto.

Problema B.3 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

a) El cálculo correcto de A y B y la discusión respecto al parámetro C se valorará hasta un máximo de 0,75 puntos.
b) Determinar el tipo de extremo se valorará hasta un máximo de 0,5 puntos.
c) Por último, el dibujo de la curva se valorará hasta un máximo de 0, 75 puntos

Problema B.4 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:
La explicación teórica hasta un máximo de 0, 5 puntos
Cada integral hasta un máximo de 0,75 punto

Problema B.5 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- Una buena explicación aclaratoria de la situación (indicando qué términos hay que sumar, obtención de fórmulas o ecuaciones) se valorará hasta 1 puntos como máximo.
- El cálculo correcto de la solución del problema se valorará hasta un máximo de 1 punto.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio A1

a) El determinante de la matriz de coeficientes es $-(a-1)^2$; es cero solo para a=1

- Para a = 1 la matriz y la matriz ampliada tienen rango igual a 2 y por tanto el sistema es compatible indeterminado.
- Para a distinto de 1 el rango de la matriz de coeficientes es 3 y por tanto el sistema es compatible determinado

b) Como nos piden resolverlo en el caso compatible indeterminado, tenemos que a= 1, la solución se obtiene resolviendo

$$\begin{matrix} x+y=1-z \\ y=-1+z \end{matrix} \quad \text{de dónde} \quad \left\{ \begin{matrix} x=2-2z \\ y=-1+z \\ z=z \end{matrix} \right\}$$

Ejercicio A2

a) Las ecuaciones de todos los planos perpendiculares a dicha recta son 4*x*+8*y*+4*z*+*D*= 0, puesto que el vector (4, 8, 4) es el vector normal del plano (obtenido como producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que constituyen la recta r). Como nos interesa el plano que pasa por el punto *P*(1, 0, -2), Obtenemos que *D* = 4. Ahora calculamos las coordenadas del punto intersección de la recta con el plano obtenido.obteniendo el punto *M*(2, -1, -1). Por tanto la ecuación de la recta pedida es

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}.$$

b) Como el vector **PM** es (1, -1, 1) su módulo será la distancia de PM, esto es $PM=\sqrt{3}$, por tanto la distancia pedida será $PQ=2\sqrt{3}$.

Ejercicio A3

Buscamos los puntos en los que la derivada es igual a 0:

$$B'(n)=-24n^2+120n-96.$$

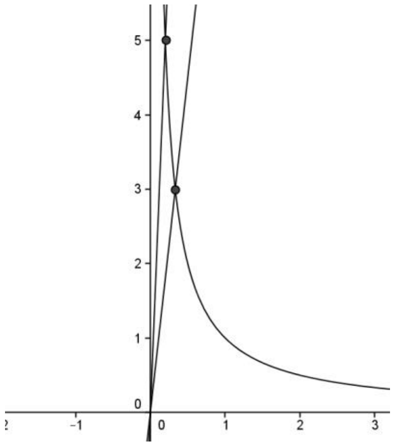
Los valores que anulan la derivada son : *n* = 1 y *n* = 4. Para saber cuál es el máximo utilizamos la segunda derivada:

$$B''(n)=-48n+120.$$

Para n= 1 hay un mínimo y para n = 4 hay un máximo. Los beneficios semanales serán de 64.000 euros.

Ejercicio A4

a)



Los puntos de corte de las rectas con la hipérbola son 1/5 y 1/3

b) El área de dicho recinto es :

$$A = \int_0^{1/5} (25x - 9x) + \int_{1/5}^{1/3} (\frac{1}{x} - 9x) = \frac{8}{25} + \ln(\frac{5}{3}) + \frac{9}{50} - \frac{1}{2} = \ln(\frac{5}{3}).$$

Ejercicio A5

Si nos fijamos:

$$\begin{matrix} 3^1 = 3 \\ 3^2 = 9 \\ 3^3 = 27 \\ 3^4 = 81 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} 7^1 = 7 \\ 7^2 = 49 \\ 7^3 = 343 \\ 7^4 = 2401 \end{matrix}$$

Quiere decir que cada cuatro potencias las terminaciones se repiten, por tanto las terminaciones del número 3^{120} es la misma que la de 3^4, esto es 1, mientras que la terminación de 7^{140} es la misma que la de 7^4, esto es 1. Por tanto el dígito correspondiente a las unidades del número *N* es 1.

SOLUCIONES

OPCIÓN B

Ejercicio B1

a) El rango de A es al menos 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$. Como el determinante de *A* es igual a $4m^2 - 12$, será cero si $m = \pm\sqrt{3}$. Para los valores $m = \pm\sqrt{3}$ el rango de *A* será 2, mientras que para los valores $m \neq \pm\sqrt{3}$ el rango de *A* será 3

b) La matriz inversa para *m* = 0 es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 0 & \frac{-3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{12} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio B2

a) El plano pedido debería tener como vector normal el vector director de la recta, esto es (1, 1, 3). Por tanto para que dicho plano pase por el punto *C* se ha de verificar que .

(x-2)·1 + (y-2)·1 + (z-3)·3 = 0.

La ecuación pedida será: x+y+3z = 13.

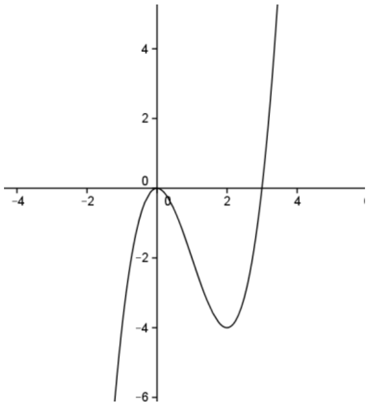
b) Si la recta pasa por los puntos *A*, *B* y *C* quiere decir que están alineados y por tanto los vectores *AB*(1, 1, 3) y *AC*(1, 3, 3) han de ser proporcionales, cosa que no ocurre. Por tanto no existe tal recta.

Ejercicio B3

a) La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$.
Por tener un extremo en *x* = 0 se verifica que *B* = 0.
Por tener un extremo en *x* = 2 se verifica *A* = -3.
Los valores de *A* y *B* quedan fijados, pero *C* puede tomar cualquier valor real.
La función es por tanto $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$

b) La segunda derivada de *f* es : $f'' = 6x - 6$.
El valor en x= 0 es un máximo, mientras que x= 2 es un mínimo

c) La gráfica $f(x) = x^3 - 3x^2$ es la siguiente:



Ejercicio B4

El método de integración por partes se basa en la derivada de un producto y se utiliza para resolver algunas integrales de productos.

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$\int (u\cdot v)'\,dx = \int u'\cdot v\;dx + \int u\cdot v'\;dx$$

$$u\cdot v = \int u'\cdot v\;dx + \int u\cdot v'\;dx$$

$$\int u\cdot v'\;dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\;dx$$

En los ejemplos que nos ocupan nos piden que apliquemos el método de integración por partes.

c) llamando $\ln(x)= u$; $x\,dx= dv$, la integral se resuelve de manera sencilla.

d) llamando $x = u$; $\cos(2x)dx= dv$, la integral se resuelve de manera sencilla.

Ejercicio B5

La suma de los 25 múltiplos seguidos de 13 se puede poner de la siguiente manera.

$$a\cdot 13+(a+1)\cdot 13+ (a+2)\cdot 13 +\ldots+ (a+24)\cdot 13 = 7150.$$

Despejando nos da a = 10, luego el primer múltiplo de 13 que aparece en dicha suma es 130 , y el último 442.