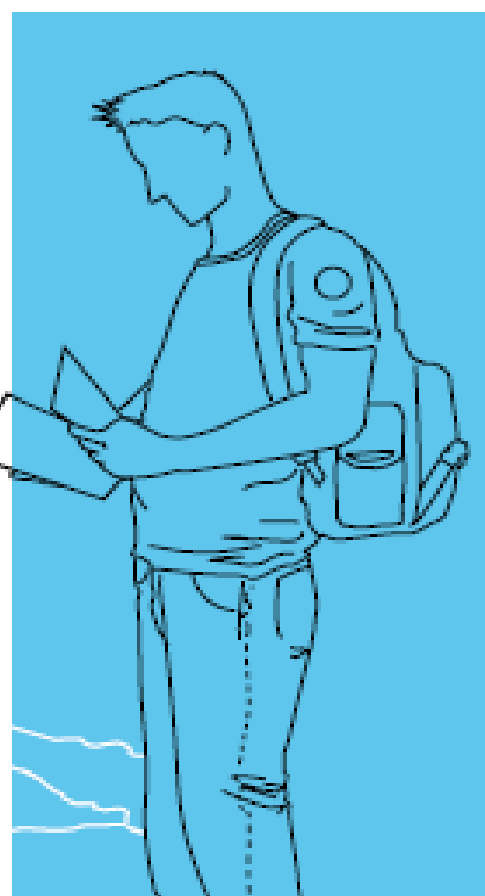
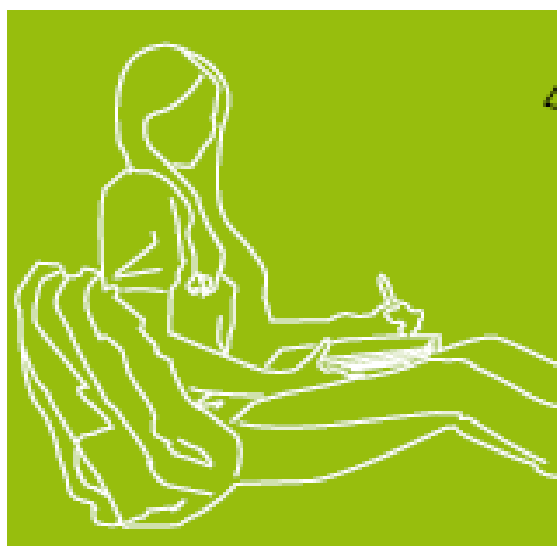
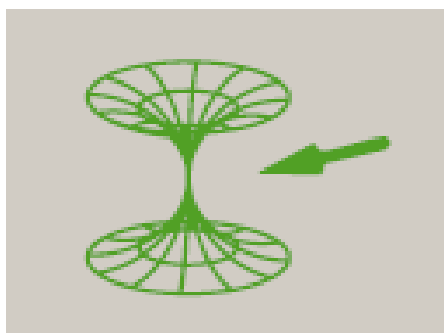
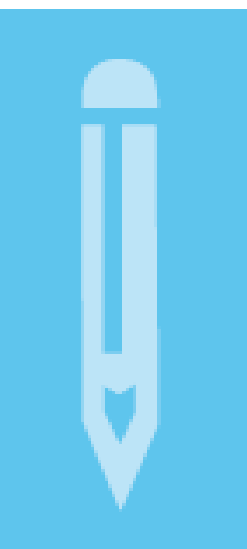


Matematika II

- BATXILERGOA
- LANBIDE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA-ZIKLOAK

Azterketa

Kalifikazio eta zuzenketa irizpideak



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

NAZIOARTEKO
BIKAIN TASUN
CAMPUSA

CAMPUS DE
EXCELENCIA
INTERNACIONAL



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2013ko EKAINA

MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2013

MATEMÁTICAS II

Azterketa honek bi aukera ditu. Horietako bati erantzun behar diozu. Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.



A AUKERA

A1 ariketa

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix} \text{ matrizea emanda, non } a \text{ parametro erreal bat baita,}$$

- Kalkula ezazu, arrazoituz, A matrizearen heina a parametroaren funtzioan.
- Azaldu ezazu ea matrizeak alderantzizkoa duen $a = 1$ kasurako, eta, baldin badu, kalkula ezazu.

A2 ariketa

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{2} \text{ ekuazioaren bidez definitutako } r \text{ zuzena eta } 2x - y + bz = 0$$

planoa emanda:

Kalkula itzazu a -ren eta b -ren balioak kasu hauetan:

- r zuzena planoarekiko perpendikularra da.
- r zuzena planoaren barnean dago.

A3 ariketa

f funtzioa ekuazio honek definitzen du: $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 6}$. Kalkula itzazu, arrazoituz:

- $f(x)$ funtzioaren definizio-eremua eta asintotak.
- $f(x)$ funtzioaren goratze- eta beheratze-tarteak.
- Egin ezazu funtzio horren grafikoaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

A4 ariketa

$y = (1/2)x^2$ parabolak bi esparrutan zatitzen du $(0,0)$, $(4,0)$, $(4, 2)$ eta $(0,2)$ erpinak dituen laukizuzena.

Kalkula ezazu bi esparru horietako bakoitzaren azalera.

A5 ariketa

Zenbat zero ditu amaieran $50! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 48 \cdot 49 \cdot 50$ zenbakiak?



B AUKERA

B1 ariketa

Sistema hau emanda:

$$\begin{cases} mx + my + 2z = m \\ x + (m - 2)y = -1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

- Egin eztabaida m parametroaren balioen arabera.
- Ebatz ezazu, ahal bada, $m = 5$ kasurako.

B2 ariketa

$A = (2, 1, 0)$ puntua eta $2x + 3y + 4z = 0$ ekuazioa duen π plano emanda:

- Aurkitu ezazu zein den A puntutik distantzia minimora dagoen π -ren puntua, eta kalkula ezazu distantzia hori.
- Aurkitu ezazu π planoarekiko A -ren simetrikoa den B puntua.

B3 ariketa

200 cm luzeko segmentu bat bitan zatitu da. Zati batekin karratu bat eratu da, eta, bestearekin, oinarria garaiera baino bi aldiz handiagoa duen laukizuzen bat. Kalkula ezazu zati bakoitzaren luzera, baldintza hau kontuan izanik: karratuaren eta laukizuzenaren azalaren baturak minimoa izan behar du.

B4 ariketa

Kalkula ezazu integral hau:

$$\int \frac{ax + b}{x^2 - 3x + 2} dx$$

a -ren eta b -ren funtzioan.

B5 ariketa

Lehen 210 zenbaki arrunten segidan:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, 210$$

7ren multiploak ezabatu dira. Kalkula ezazu, arrazoituz, gainerako terminoen batura.



MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa guztira 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra bai eta atal bakoitzaren planteamendua ere (egotekotan).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- a) Heinarean eztabaidak 1,25 puntuko balioa izango du gehienez.
- b) $a = 1$ kasurako alderantzizko matrizea lortzeak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.

A.2 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

Ataletariko bakoitzak, gehienez, puntu bateko balioa izango du.

A.3 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- a) Domeinua eta asintotak zuzen kalkulatzek 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.
- b) Goratze- eta beheratze-tarteak kalkulatzek 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.
- c) Azkenik, kurba marrazteak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.

A.4 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- a) Esparru osoa zuzen marrazteak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.
- b) Barrowen teorema aplikatuz esparru bakoitzaren azalera lortzeak 1,25 puntuko balioa izango du gehienez.

A.5 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- Adierazpen-eskema on bat egiteak edo egoera argitzeko azalpen bat emateak 0,75 puntuko balioa izango du gehienez.
- Problemaren soluzioa zuzen kalkulatzek 1,25 puntuko balioa izango du gehienez.



B AUKERA

B.1 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- Matrize bakoitzaren determinantea zuzen kalkulatzek 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.
- Sistemak m parametroaren funtzioan nola jokatzen duen eztabaidatzeak 1 puntuko balioa izango du gehienez.
- $m = 5$ kasurako ebazteak 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.

B.2 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

Planoarekiko perpendikularra den zuzena lortzeko 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.

Tarteko puntua kalkulatzek 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.

Puntu simetrikoa kalkulatzek 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.

Planorainoko distantzia kalkulatzek 0,5 puntuko balioa izango du gehienez.

B.3 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- Problema zuzen planteatzek 1 puntuko balioa izango du gehienez.
- Deribatuaren irizpideak aplikatuz soluzioa lortzeko 1 puntuko balioa izango du gehienez.

B.4 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

Integrala integral sinpletan deskonposatzek eta parametro egokiak kalkulatzek 2 puntuko balioa izango dute gehienez, bien artean.

B.5 ariketa (2 puntu)

Ariketa baloratzean kontuan hartu beharrekoak:

- Zenbaki guztien batura kalkulatzek 1 puntuko balioa izango du gehienez.
- 7ren multiploen batura eta problemaren azken emaitza kalkulatzek 1 puntuko balioa izango du gehienez.



EBAZPENAK

A AUKERA

A.1 ariketa

- a) Matrizearen determinantea $-a(a^2 + 1)$ da. Beraz, $a \neq 0$ kasuan, A -ren heina 3 da. $a = 0$ kasuan, A -ren heina 2 da, determinantea zero ez duen 2 ordenako minor bat baitago.
- b) $a = 1$ kasurako, alderantzizkoa existitzen da, eta balio hau du:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A.2 ariketa

- a) Baldin eta zuzena eta planoak perpendikularrak badira, orduan, zuzenaren bektore zuzentzailea eta planoaren bektore normala paraleloak izango dira, eta, beraz, haien osagaiak proportzionalak. Hau da:

$$\frac{a}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{b}, \text{ eta hortik: } a = -8 \text{ eta } b = -\frac{1}{2}.$$

- b) Zuzena planoan egongo bada, zuzenaren bektore zuzentzaileak eta planoaren normalak perpendikularrak izan behar dute, eta, gainera, zuzenaren edozein puntuk planoan egon behar du. $P(2, 1, -1)$ puntua planoan dagoelako baldintza ezarrita, hau izango dugu:

$$2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + b(-1) = 0$$

eta hortik: $b = 3$.

Orain bektoreen perpendikulartasun-baldintza ezartzen badugu, hau izango dugu:

$$a \cdot 2 + 4(-1) + 2(3) = 0; \text{ eta hortik: } a = -1.$$

A.3 ariketa

- a) Funtzioa ez da existitzen izendatzailearen zeroetan; beraz, haren definizio-eremua zuzen erreal osoa da, 2 eta 3 balioak izan ezik. Asintotak hauek dira:

Horizontalak: $y = 0$, plus infinituan zein minus infinituan.

Bertikalak: $x = 2$ eta $x = 3$

Zeiharrak: Ez du.

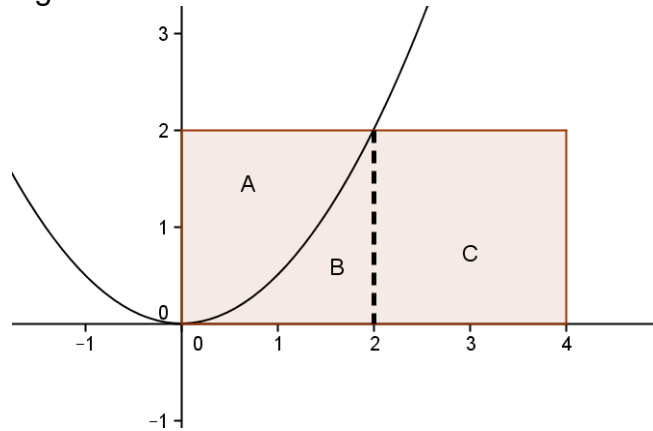
- b) Lehen deribatua $f'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 6)^2}$ da. Bi asintota bertikal dituenez,

funtzioa gorakorra da $(-\infty, 2)$ eta $(2, \frac{5}{2})$ tartetan, eta beherakorra, berriz,

$(\frac{5}{2}, 3)$ eta $(3, +\infty)$ tartetan.

A.4 ariketa

Esparrua aski adierazgarria da.



Laukizuzen osoaren azalera 8 unitate karratu da; C eskualdeak 4 unitate karratu ditu; eta B eskualdearen azalera hau izango da:

$$B = \int_0^2 0,5x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Horrenbestez, parabolak bi eskualdetan banatzen du laukizuzena, B + C eta A, eta haien azalerak, hurrenez hurren, 16/3 unitate karratu eta 8/3 unitate karratu dira.

A.5 ariketa

50! zenbakiaren faktORIZAZIOAN 12 bost agertzen dira guztira: 5 zenbakiaren 10 multiploak, eta, gainera, 25 eta 50 zenbakiak bi 5ak. Biak behar beste agertzen dira azken hamabi zeroak sortzeko.



EBAZPENAK

B AUKERA

B.1 ariketa

Koefiziente-matrizearen determinantea $2(m-1)(m-2)$ da; beraz, $m=1$ edo 2 ez denean, sistema bateragarri determinatua da.

$m=1$ denean, matrizearen eta matrize zabalduaren heina 2 da; beraz, sistema bateragarri indeterminatua da.

$m=2$ kasuan, heinak desberdinak dira; beraz, sistema bateraezina da.

$m=5$ kasuan, soluzioa hau da: $(x,y,z) = (1, -2/3, 5/3)$.

B.2 ariketa

A puntutik pasatzen den eta planoarekiko perpendikularra den zuzen bat aurkitzea da metodoa; zuzen horrek planoaren ebakitzen duen puntua AB segmentua bi zati berdinetan banatzen duen puntua izango da, B puntua A ren planoarekiko puntu simetrikoa izanik. Hau da zuzen perpendikularra:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

Zuzen horren eta planoaren arteko ebaketak puntua ematen digu:

$$C(44/29, 8/29, -28/29)$$

B puntu simetrikoa, beraz, $B(30/29, -13/29, -56/29)$ izango da. Planotik C punturainoko distantzia hau izango da:

$$\frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{29}}$$

B.3 ariketa

Karratuaren aldea x bada, eta laukizuzenarenak $2y$ eta y badira, erlazio hau minimizatu egin behar da:

$$A = x^2 + 2y^2$$

$4x + 6y = 200$ denez, x -ren balioa bakanduz eta M -n sartuz, hau izango dugu:

$$M = \left(\frac{100 - 3y}{2} \right)^2 + 2y^2$$
 M minimizatzeko, y aldagaiarekiko deribatuko dugu, eta

minimoaren baldintza ezarriko dugu; hala, $M' = \frac{17y - 300}{2} = 0$ lortuko dugu.

Hortik, $y = 300/17$ cm izango da, eta $x = 400/17$ cm izango da.

B.4 ariketa

Frakzio sinpletako deskonposizio hau hartzen da:

$$\frac{ax+b}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Behar diren eragiketak eginez, hau lortzen da: $A = -(a+b)$ eta $B = 2a + b$. Beraz:



**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

$$\int \frac{ax+b}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{-(a+b)}{x-1} dx + \int \frac{2a+b}{x-2} dx = -(a+b) \ln |x-1| + (2a+b) \ln |x-2| + C.$$

B.5 ariketa

Termino guztien batura (7ren multiploena barne) hau da:

$$\left(\frac{1+210}{2}\right)^{210} = 22\,155.$$

7ren multiploen batura hau da:

$$7 + 2 \cdot 7 + \dots + 30 \cdot 7 = 7(1 + 2 + \dots + 30) = 3.255.$$

Horrenbestez, eskatutako batura hau izango da:

$$22.155 - 3.255 = 18.900.$$