2015 UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBA

Matematika II

- BATXILERGOA
- LANDIBE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA ZIKLOAK

Azterketa

Kalifikazio eta zuzenketa irizpideak

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

NAZIOARTEKO BIKAINTASUN CAMPUSA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 Ariketa

Hau dakigu: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$. Kalkulatu, arrazoituz eta propietate egokiak aplikatuz, determinante hauen balioa:

A = $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$ B = $\begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}$

A2 Ariketa

a) Aurkitu zer ekuazio duen plano batek, jakinik P(-1, 2, 3) puntutik pasatzen dela eta a(-1, -2, -3) eta b(1, 3, 5) bektoreekiko paraleloa dela.

b) Kalkulatu zer balio izan behar duen m-k aurreko atalean kalkulatutako planoa eta $mx - y + 5z = 8$ planoa perpendikularrak izan daitezen.

A3 Ariketa

Polinomio hau emanda: $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) Zehaztu a, b eta c koefizienteak, jakinik $x = -1$ eta $x = 1$ balioetan mutur erlatiboak dituela eta, gainera, koordenatu-jatorritik pasatzen dela.

b) Aztertu bi mutur erlatibo horien izaera (maximoak ala minimoak diren) eta egin polinomioaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

A4 Ariketa

Marraztu $f(x) = x^2 - 2x + 1$ eta $g(x) = -x^2 + 5$ parabolen artean itxitako esparrua, eta kalkulatu esparru horren azalera.

A5 Ariketa

2 eta 3 digituekin, 5 zifrako zenbat zenbaki desberdin eratu daitezke?

B AUKERA

B1 Ariketa

Ekuazio linealen sistema hau emanda:

$$\begin{aligned} x+y-z&=-4 \\ 3x+ay+z&=a-1 \\ 2x+ay&=-2 \end{aligned}$$

a) Eztabaidatu nola jokatzen duen sistemak a parametroaren balioen arabera.
b) Ebatzi sistema indeterminazio-kasuan edo -kasuetan.
c) Ba al da a-ren baliorik sistemak soluziorik ez izatea dakarrenik? Arrazoitu erantzuna.

B2 Ariketa

Aurkitu zuzen bat, hau jakinda: haren bektore zuzentzailea v (1, 2, 3) da, eta P' puntutik pasatzen da, P' puntua P(0,-2,0) puntuaren simetrikoa izanik $\pi: \mathrm{x}+3\mathrm{y}+\mathrm{z}=5$ planoarekiko.

B3 Ariketa

Izan bedi funtzio hau: $f(x)=(3x-2x^2)e^x$

a) Kalkulatu f funtzioaren goratze- eta beheratze-tarteak.
b)Kalkulatu f-ren mutur erlatiboak (maximoak eta minimoak).

B4 Ariketa

Kalkulatu integral definitu honen balioa:

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$$

B5 Ariketa

5 zenbakiaren ondoz ondoko 250 multiplo idatzi ditugu, 50 zenbakia lehenengoa izanik. Orain, lehen 90 zenbakiak ezabatuko ditugu. Zenbat balio du gainerako zenbakien baturak?

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ariketa (2 puntu)

- Determinante bakoitza ebaztea eta eztabaidatzea, dagozkion propietateak modu egokian aplikatuz (1 puntu atal bakoitza)

A.2 ariketa (2 puntu)

- Problema modu egokian planteatzea eta planoa zuzen lortzea (puntu bat)
- *m*-ren balioa modu egokian lortzea (1 puntu)

A.3 ariketa (2 puntu)

- Hiru parametroak lortzea baldintzak jarrita (1 puntu)
- Muturren izaera aztertzea eta funtzioa gutxi gorabehera marraztea (1 puntu)

A.4 ariketa (2 puntu)

- Bi parabolak marraztea eta esparrua lortzea (1 puntu)
- Esparruaren azalera lortzea Barrow-ren erregela aplikatuz (1 puntu)

A.5 ariketa (2 puntu)

- Emaitza lortzea, zuhaitz-diagrama erabiliz, taula baten bidez, saiakuntza eta errakuntza erabiliz edo beste eraikitze-metodoren baten bidez (2 puntu).

B AUKERA

B.1 ariketa (2 puntu)

- Matrizearen determinantea modu egokian ebaztea eta eztabaidatzea (0,75 puntu)
- $a = 1$ indeterminazio-kasurako ebaztea (0,75 puntu)
- Argi esatea sistemak beti duela soluzioa *a*-ren balioa edozein dela ere (0,5 puntu)

B.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea eta P' puntua (P-ren simetrikoa planoarekiko) lortzea (1,5 puntu)
- P'-tik pasatzen den eta emandako bektore zuzentzailea duen zuzena lortzea (0,5 puntu)

B.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea (0,5 puntu)
- Hazkunde-tarteak lortzea (0,75 puntu)
- Muturrak kalkulatzea, dela bigarren deribatuaren bidez, dela lehen deribatuaren zeinuaren aldaketaren bidez (0,75 puntu)

B.4 ariketa (2 puntu)

- Integral mugagabea kalkulatzea, zatikako integrazioaren metodoa aplikatuz (1,5 puntu)
- Integral mugatua kalkulatzea (0,5 puntu)

B.5 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea eta, prozedura aljebraikoak edo bestelako prozedura batzuk aplikatuz, ebaztea (2 puntu)

EBAZPENAK

A.1.ariketa

$$A=\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot\left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}\right)=2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot\left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}\right)=-2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=-2\cdot 10=-20$$

$$B=\begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}=3.2(-1)\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=-(-1)(-6)\begin{vmatrix} a & b & b \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=6.10=60$$

A.2.ariketa

a) Planoarekiko normala den bektorea ***a*** eta ***b*** bektoreen biderkadura bektoriala da. Hau da bektore hori: ***a*** **x** ***b*** = (-1, 2, -1). Beraz, hau izango da eskatutako planoaren ekuazioa:

$$-1(x+1)+2(y-2)-1(z-3) = 0.$$

Garatuz, hau izango dugu: $-x+2y-z = 2$

b) Bi planoak perpendikularrak izango badira, haien bektore normalen biderkadura eskalarrak zero izan behar du. Beraz:

$$m.(-1)+(-1).2 + 5(-1) = 0.$$

Eta, ebatziz: $m = -7$

A.3.ariketa.

a) $P(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad\Rightarrow\quad P'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$ mutur erlatiboa denez, $P'(-1)=0 \;\Rightarrow\; 3-2a+b=0$

$x=1$ mutur erlatiboa denez, $P'(1)=0 \;\Rightarrow\; 3+2a+b=0$

Bi ekuazio horiek ebatzita, hau lortuko dugu: $a = 0$ eta $b = -3$. Eta, horretaz gainera, funtzio polinomikoa koordenatu-jatorritik pasatzen denez: $P(0)=0 \;\Rightarrow\; c=0$

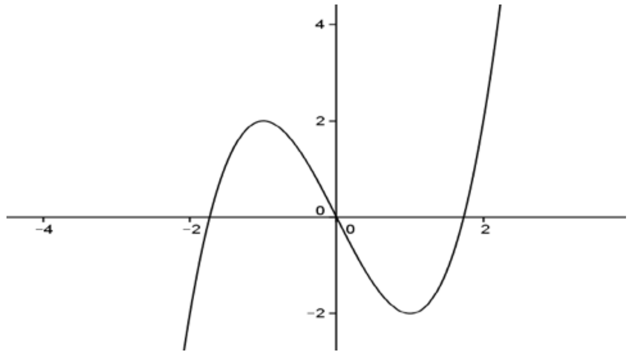
Beraz, hau da bilatutako polinomioa: $P(x)= x^3-3x$.

b) Badakigu muturren izaera (maximoa edo minimoa) bigarren deribatuaren zeinuaren araberakoa dela: $P''(x)=6x$.

$P''(-1) = -6 < 0 \;\Rightarrow\; x = -1$ balioan, funtzioak maximo erlatibo bat du.

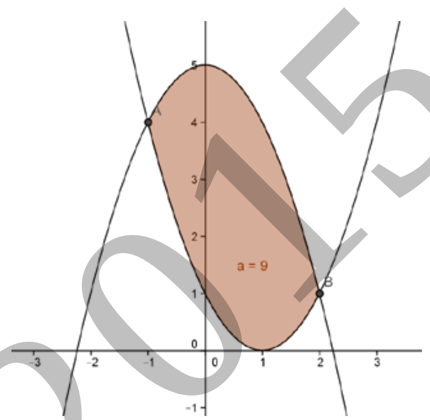
$P''(1) = 6 > 0 \;\Rightarrow\; x = 1$ balioan, funtzioak minimo erlatibo bat du.

Hau da $P(x)$-ren grafikoa:



A.4.ariketa.

Hau da esparrua:

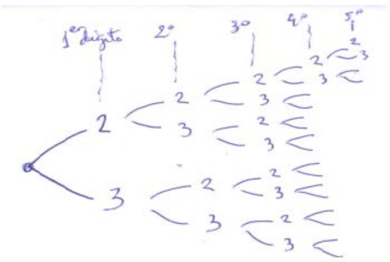


Bi parabolek x = -1 eta x = 2 puntuetan ebakitzen dute elkar. Azalera, beraz, hau izango da:

$$\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+5\right)-\left(x^2-2x+1\right)-\right]dx = \left[-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2} = 9$$

A.5.ariketa

Garbi dago lehen digitua 2 edo 3 izan daitekeela; lehen digitua 2 izanda, bigarren digitua 2 edo 3 izan daiteke; eta horrela ondoz ondo bost zifretara iritsi arte. Diagrama aski adierazgarria da:



Guztira, $2^5 = 32$ zenbaki desberdin izango dira.

B.1.ariketa

a) Hau da sistemaren determinantea: $|A| = -2a + 2$. Beraz, a = 1 baliorako, determinantearen balioa zero izango da.
Baldin eta $a \neq 1$, sistema bateragarria eta determinatua da, matrizearen heina 3 baita eta bat baitator matrize zabalduaren heinarekin eta ezezagunen kopuruarekin.
a = 1 baliorako, egiazta daiteke matrizearen heina eta haren zabalduarena bat datozela eta 2 balio dutela; eta balio hori ezezagunen kopurua baino txikiagoa da. Beraz, sistema bateragarri indeterminatua da.
b) a =1 baliorako, ikusi dugun moduan, bateragarri indeterminatua da; eta hau izango da sistema:

$$x + y - z = -4$$
$$3x + y + z = 0$$

Eta ebatziz: 2-z, -6+2z, z, $z \in R$ kasurako.
a) atalari dagokion eztabaidan ikusi dugun moduan, ez dago *a* parametroaren baliorik soluziorik ez duenik.

B.2.ariketa

Lehenik, P' puntua (P -ren simetrikoa planoarekiko) kalkulatuko dugu:
$\vec{n} = (1, 3, 1)$ bektorea planoarekiko normala da. Hauek dira PP' zuzenaren ekuazio parametrikoak (zuzen hori P-tik pasatzen da, eta $\vec{n}$ bektore zuzentzailea du):

$$\left.\begin{array}{c} x = t \\ y = -2 + 3t \\ z = t \end{array}\right\}$$

A puntua, zuzenaren eta planoaren arteko ebakitze-puntua, ekuazio hau ebatziz lortzen da:

$$t + 3(-2 + 3t) + t = 5$$

Ebatzita: t= 1; beraz, A(1,1, 1). PP' zuzenkiaren erdiko puntua A denez, hau lortuko dugu: $P'(2,4,2)$. Amaitzeko, eskatutako zuzenaren ekuazioa idatz dezakegu:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{3}$$

B.3.ariketa.

a) Hau da f -ren lehen deribatua:

$$f' = -e^x (x-1)(x + \frac{3}{2}) .$$

Zerora berdinduz, bi balio lortuko ditugu: x = 1 ; x = -3/2. e^x beti positiboa denez, honen zeinua aztertuko dugu:

$$-(x-1)(x + \frac{3}{2})$$

x tarte honetan:	$(-\infty, -3/2)$	$(-3/2, 1)$	$(1, \infty)$
f' -ren zeinua	negatiboa	positiboa	negatiboa

Hazkundea	Beherakorra	Gorakorra	Beherakorra

b) Minimoa $A\ (-3/2, -9e^{-\frac{3}{2}})$ puntuan lortzen da, eta maximoa B (1, e) puntuan.

B.4.ariketa

Zatikako integrazioaren metodoa erabiliz eta, gero, Barrow-ren erregela aplikatuz ebatziko dugu.

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^e x^2 \ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln(x) - \frac{1}{3})\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$$

B.5.ariketa

Hau da lehen 250 zenbakien batura:

50+55+60+······+ 1295 = 168.125.

Eta hau da, berriz, lehen 90 batugaien batura:

50+55+60+···+495 = 24.525.

Horrenbestez, hau izango da eskatutako batura: 168.125 – 24525 = **143.600**