Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

UPV/EHU

2016

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK	*PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2016ko UZTAILA	*JULIO 2016*
MATEMATIKA II	*MATEMÁTICAS II*

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK 2016ko UZTAILA	*PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD* *JULIO 2016*
	MATEMATIKA II	*MATEMÁTICAS II*

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ -x+2y+bz&=-3\\ x-2y-z&=b \end{aligned}$$

Encontrar la solución, si existe, para el caso b = 2.

Ejercicio A2

Calcular la distancia del punto A de coordenadas (4, 4, 3) al plano que pasa por los puntos de coordenadas B(1, 1,0), C(1, 0, 1) y D (0, 1, 1).

Ejercicio A3

Calcular los valores A, B, C y D para que la función

$$f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

tenga extremos relativos en (0,0) y en (2,2).

Ejercicio A4

Resolver las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int\frac{5dx}{x^2-3x+2}$ b) $\displaystyle\int(2x+1)^4dx$.

Ejercicio A5

Calcula la cifra de las unidades del número

$$N=3^{2016}+2^{2016}.$$

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Determina el rango de la matriz A según los valores del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ a & a-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 1$. Si no existe tal inversa explica porqué.

Ejercicio B2

Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 0, 1)$.

a) Determinar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $A(4,-2,-1)$.

b) Determinar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $B(2, 1, -3)$.

c) Calcular la distancia que hay entre ambos planos.

Ejercicio B3

Dada la función polinómica

$$P(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}:$$

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $P(x)$.

b) Obtener sus máximos y mínimos.

c) ¿Existe algún valor de x tal que $P(x) < 0$? Razonar porqué.

Ejercicio B4

Dadas las funciones

$$y = 9 - x^2 \quad \text{e} \quad y = 2x + 1$$

a) Dibujar el recinto acotado por sus gráficas.

b) Hallar el área de dicho recinto.

Ejercicio B5

Ampliamos una fotografía rectangular de manera que sus dimensiones, largo y ancho, sean un 20% más que las dimensiones originales. Si la nueva fotografía ocupa de 432 centímetros cuadrados ¿cuanto ocupaba la fotografía inicial?

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

- Obtención de la matriz del sistema, cálculo de su determinante obtención y discusión de los valores (1,5 puntos)
- Resolución correcta en el caso b=2 (0,5 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)

- Obtención del plano que pasa por los tres puntos (1,25 puntos)
- Cálculo de la distancia entre el punto y el plano (0,75puntos)

Problema A.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0.5 puntos)
- Obtención de los parámetros imponiendo las condiciones pertinentes(1,5 puntos)

Problema A. 4 (2 puntos)

- Obtención de cada integral (1 punto), total 2 puntos

Problema A.5 (2 puntos)

- Obtención de la pauta por la que se repiten las terminaciones en los dos casos(1 punto)
- Resolución correcta aplicando la pauta obtenida(1 punto)

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

- Resolución del determinante de la matriz (0.5 puntos)
- Discusión para los dos casos(1 punto)
- Cálculo de la matriz inversa para a=1(0.5 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)

- Obtención de la recta PQ (0.75 puntos)
- Determinar cada plano (0.25 puntos) - Total 0,5 puntos
- Calcular la distancia entre los planos(0,75 puntos)

Problema B.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0.5 puntos)
- Obtención de los máximos y mínomos(0,75 puntos)
- Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (0,5 puntos)
- Razonar que no existe ningún x, tal que P(x)<0 (0,25 puntos)

Problema B. 4 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- Dibujo de la parábola y la recta dada y obtención del recinto(1 punto)
- Cálculo del área del recinto aplicando la regla de Barrow(1punto)

Problema B.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema (1 punto)
- Resolución correcta del problema(1 punto)

SOLUCIONES

Problema A.1.

El determinante del sistema es igual a. $3b-3$. Igualando a cero obtenemos el valor b= 1
Por tanto

- para $b \neq 1$, El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO
- Para $b = 1$, el rango de la matriz es 2, mientras que el rango de matriz ampliada es 3, por tanto en este caso el sistema es INCOMPATIBLE
- Para $b = 2$. Resolvemos el sistema y nos da $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$

Problema A.2.

El plano que pasa por los puntos B, C y D se puede obtener de muchas formas, una de ellas es :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Resolviendo el determinante obtenemos la ecuación del plano: $x+y+z-2=0$. Para calcular la distancia entre punto A y el plano aplicamos la fórmula.

$$d(A, Plano) = \frac{|4+4+3-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

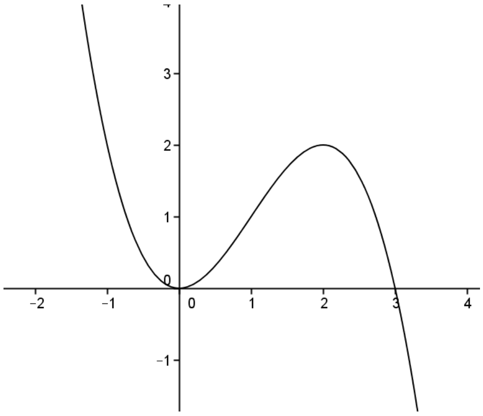
Problema A.3.

La derivada de la función es : $f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$. Al imponer la condición de que tenga extremos relativos en (0,0) y en (2,2), obtenemos

$$C = 0 \text{ y } 0 = 12A + 4B,$$

mientras que al imponer la condición de que pasa por los puntos (0,0) y (2,2) obtenemos $D= 0$ y $2 = 8A + 4B$. Resolviendo obtenemos:

$$A = -\frac{1}{2}; B = \frac{3}{2}; C = 0; D = 0$$



Problema A.4.

c) La integral $\int \frac{5dx}{x^2-3x+2}$ es racional, se puede descomponer en dos integrales.

$$\int \frac{5dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{-5}{x-1}dx + \int \frac{5}{x-2}dx = -5\ln(x-1) + 5\ln(x-2) + C\ .$$

d) La segunda integral mediante un cambio de variable $2x+1=t$ se transforma en una integral inmediata:

$$\frac{1}{2}\int t^4 dx = \frac{(2x+1)^5}{5} + C\ .$$

Problema A.5.

Si observamos las terminaciones de las potencias sucesivas de 2 y 3 obtenemos:

$3^1 = 3$	$2^1 = 2$
$3^2 = 9$	$2^2 = 4$
$3^3 = 27$	$2^3 = 8$
$3^4 = 81$	$2^4 = 16$
....	....
$3^5 = 243$	$2^5 = 32$
$3^6 = 729$	$2^6 = 64$

Nos indica que las dos potencias se van repitiendo *en ciclos de* 4. Por tanto si dividimos 2016 entre 4 y nos fijamos en el resto (que es cero), resolveremos el problema.

Esto es, la cifra de las unidades de 3^{2016} es 1, mientras que la cifra de las unidades de 2^{2016}es 6. Por tanto la cifra de las unidades de $N = 3^{2016} + 2^{2016}$ es 7.

SOLUCIÓN

Problema B.1.

Para calcular el rango calculamos el determinante de la matriz, en nuestro caso:

$$|A| = 2a^2 - 3a + 1$$

Igualando a cero obtenemos a = 1 y a = 1/2. Por tanto:

- Si $a \neq 1$, ½ el rango de la matriz A es 3
- Si a = 1 , $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, como se ve fácilmente su rango es 2
- Si a = 1/2 la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & -5/2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, y el rango también es 2.

No puede hallarse su inversa para a = 1 pues el determinante de A es igual a cero.

Problema B.2.

c) Un vector direccional de r es $(2,\ 2,\ 2)$ y en general plano perpendicular a r tendrá por ecuación: $2x + 2y + 2z + D = 0$. Como el primer plano pasa por $(4,\ -2,\ -1)$: $8 - 4 - 2 + D = 0 \Rightarrow \mathrm{D} = 2$ y por tanto: $2x + 2y + z + 2 = 0$. Como el segundo plano pasa por $(2,\ -1,\ -3)$: $4 - 2 - 6 + D = 0 \Rightarrow \mathrm{D} = 4$ y por tanto: $2x + 2y + z + 4 = 0$

d) Al ser los planos paralelos. La distancia entre ambos es:

$$d = \left| \frac{D - D'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{4 - 2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{3} \ .$$

También se podría haber hallado calculando la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro plano.

Problema B.3.

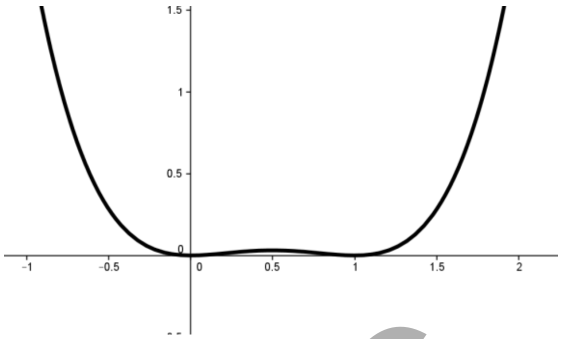
Para resolver el problema derivamos la función $P(x)$ obteniendo:

$P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$. Igualando a cero obtenemos tres valores: x = 0, x = 0,5 y x = 1. Por tanto $P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = 2x(x - 0.5)(x - 1)$.

d) Los intervalos de crecimiento serán:

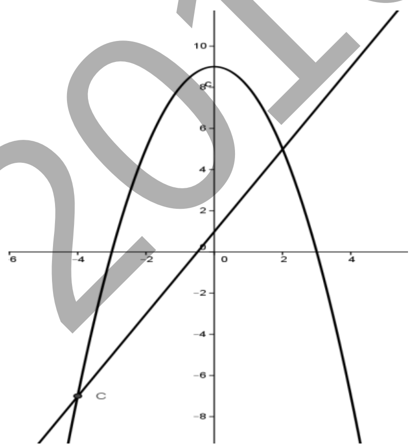
- Crecimiento: $(0, 0.5) \bigcup (1, +\infty)$
- Decrecimiento: $(-\infty, 0) \bigcup (0.5, 1)$

e) Se comprueba fácilmente que para x = 0 y x = 1 la función tiene un mínimo, mientras que para x = 0,5 la función tiene un máximo.
f) Como los mínimos se alcanzan en x = 0 y x = 1 y en los dos los valores son $P(0)=P(1)=0$, la función será mayor o igual que cero para cualquier valor de x. Por tanto no existen valores de x tales que $P(x)<0$



Problema B.4.

Se trata de la región limitada por una recta y una parábola. Sus puntos de corte son x = - 4 y x = 2 . Como puede verse la parábola está encima de la recta en la región pedida.



El área pedida es igual a:

$$A=\int_{-4}^{2}(9-x^2-2x-1)dx=36$$ unidades cuadradas.

Problema B.5.

Denominando x e y a las dimensiones de la fotografía original. La nueva fotografía tendrá por dimensiones 1,2 x y 1,2 y. Como ocupa 432 centímetros cuadrados, llegamos la siguiente ecuación:

$$(1.2\,x)(1.2\,y)=432\,.$$

Finalmente obtenemos $x\cdot y=\dfrac{432}{(1,2)(1,2)}=300$ centímetros cuadrados.