



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2016ko EKAINA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATURIKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2016

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, programagarriak ez badira.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
PROBAK

2016ko EKAINA

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATURIKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

JUNIO 2016

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

A AUKERA

A 1 (3 puntu gehienez)

Herriko ikastetxera 160 ikasleak daramatzen garraio-enpresari 40 eserlekuko autobus baten zerbitzu bakoitza 120 € kostatzen zaio eta 20 eserlekuko mikrobus baten zerbitzu bakoitza, berriz, 80 € bakarrik. Erabaki behar dugu zenbat autobus, X , eta mikrobus, Y , erabili behar diren ikasle guztiak garraiatzeko, garraio-kostua ahalik eta txikiena izan dadin. Gainera, baldintza hauek bete behar dira: enpresak 5 autobus-gidari (autobus-gidariak mikrobusak ere gidatu ditzakete), eta beste 7 mikrobus-gidari (ez dute baimenik autobusak gidatzeko) ditu. Horretaz gain, zirkulazio-agintariak behartuta, mikrobusen kopuruak autobusen kopurua baino bi aldiz handiagoa izan behar du gutxienez. Hau eskatzen da:

- Marraztu XY planoan problemaren soluzio bideragarrien eremua.
- Aurkitu X autobus eta Y mikrobus kopururik onenak, konpainiaren kostuak minimizatu eta baldintzak betetzen dituztenak. Kalkula ezazu kostu hori.

A 2 (3 puntu gehienez)

$f(x) = \frac{A}{x+9}$ eta $g(x) = \frac{Bx}{x^2+6x+\alpha}$ funtzioen bitartez adierazitako bi kurba ditugu. Kurba horiek A , B eta α parametro ezezagunen mende daude. Erantzun:

- Zenbat balio behar dute A eta B parametroek $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak $(1, 1/2)$ puntutik igaro daitezen eta $x = 5$ puntuan balio berdinak izan ditzaten, hau da, puntu horretan hau bete dadin: $f(5) = g(5)$?
- Aurkitu $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen maximoak eta minimoak.
- Adierazi $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen existentzia-eremuak.

A 3 (2 puntu gehienez)

Nire hirian, euria egiten du egunen $1/3$ batean. Euria ari duenean, auto-ilarak sortzen dira, eta, horren ondorioz, lanera berandu heltzeko probabilitatea $2/3$ koa da. Euria ari ez badu, ostera, lanera berandu heltzeko probabilitatea $1/8$ koa da. Erantzun:

- Zer probabilitate dago lanera berandu heltzeko?
- Gaur lanera berandu heldu banaiz, zein da euria egin izanaren probabilitatea?
- Jakinik atzo euria egin zuela eta gaur, aldiz, ez duela euririk egin, zer probabilitate dago bi egunetako batean lanera berandu heltzeko eta bestean garaiz heltzeko?

A 4 (2 puntu gehienez)

Joko olinpikoetarako luzera-jauziko sailkapeneko saio batzuetan, lehenengo 400 jauzien batez bestekoa 7,75 m izan da. Badakigu luzera-jauziek $\sigma^2 = 0,36 \text{ m}^2$ -ko bariantza duen banaketa normal bati jarraitzen diotela.

- Lortu populazio osoaren jauzien μ batezbestekoarentzako tarte bat, % 95eko konfiantzakoa.
- Zein izan behar luke gutxieneko lagin-tamainak, esan ahal izateko jauzien benetako batezbestekoa laginaren batezbestekotik 4cm baino gutxiagora dagoela, % 90eko konfiantza-maila dugularik?



B AUKERA

B 1 (3 puntu gehienez)

Izan bitez matrize hauek, non u eta v parametro ezezagunak diren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Zehaztu α , β , u eta v parametroen balioak ondoko matrize-ekuazio hau betetzeko, B^T matrizea B matrizearen iraulia izanik.

$$A \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} B^T + C \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D$$

- b) Zehaztu a eta b konstanten balioak ondoko matrize-ekuazio hau betetzeko, A^{-1} matrizea A matrizearen alderantzizkoa izanik:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B 2 (3 puntu gehienez)

Institutu batek, ikasketa-amaierako bidaia finantzatzeko, kamisetak saltzea proposatu du. Aldez aurreko ikerketak ziurtatzen du salduko diren kamiseten kopurua (KK), x prezioaren mendekoa izango dela (eurotan), funtzio honen arabera: $KK(x) = 180 - 10x$, $0 \leq x \leq 18$.

- a) Zenbat kamiseta salduko dira 10 €-an? Azaldu zein den kamiseta-salmenten igoera/jaitsiera prezioa euro bat igotzen/jaisten den bakoitzean.
- b) Lortu salmentengatiko diru-sarrera adierazten duen funtzioa. Zer prezio emango digu diru-sarrera maximoa? Kasu horretan, zenbat kamiseta salduko lirateke?
- c) Kamisetak saltzen dizkigun dendak, guztira $K(z) = 4z + 50$ euro kobratuko digu z kamisetako eskaera batengatik. Kalkulatu zenbat ordaindu behar diogun dendari saldutako kamisetengatik x salmenta-prezioaren arabera. Idatzi irabaziaren funtzioa (x -ren mende), eta irabazi maximoa lortzeko x prezioa.

B 3 (2 puntu gehienez)

Bingo batean, ohiko kubo-formako dadoaren ordez, dodekaedro-formako dado berri bat darabilte. Dado berri honen 12 aurpegietan 1, 2, 3, 4 eta 5 zenbakiak txandakatzen dira. "1" zenbakia aurpegi batean agertzen da, "2" zenbakia ere aurpegi batean, "3" zenbakia bi aurpegitan, "4" zenbakia hiru aurpegitan eta "5" zenbakia bost aurpegitan. Dado hori orekatua baldin badago eta botatzen dugunean aurpegi guztiak ateratzeko probabilitatea berdina dela jakinda, kalkulatu:

- a) Dadoa bi aldiz botatzen badugu, zer probabilitate izango da bi zenbaki bakoiti ateratzeko?
- b) Dadoa hiru aldiz botatzen badugu, zer probabilitate izango da ateratako zenbaki guztien batura 6 izateko?



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2016ko EKAINA

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATURIKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2016

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

B 4 (2 puntu gehienez)

Hiri bateko meteorologia-estazioak adierazten duenez, abuztuko tenperatura maximoak $28\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ko batezbestekoa duen banaketa normal bati jarraitzen dio, eta $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ko desbiderapen estandarra du. Erantzun:

- Zer probabilitate dago abuztuko egun batean gehieneko tenperatura $32\text{ }^{\circ}\text{C}$ baino altuagoa izateko?
- Abuztuko zenbat egunetan espero izatekoa da gehieneko tenperatura $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ren azpian egotea?
- Zer probabilitate dago abuztuko egun batean gehieneko tenperatura $28\text{ }^{\circ}\text{C}$ eta $32\text{ }^{\circ}\text{C}$ artean izateko?
- Zein izango da, % 95eko probabilitatearekin, abuztuko egun batean gehieneko tenperaturak gaindituko ez duen balioa?

2016



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATURIKO MATEMATIKA II

Puntuazio-sistema

Probaren puntuazioa guztira 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.

Lehenengo bi problemak 0 eta 3 puntu artean baloratuko dira, eta azken biak 0 eta 2 puntu artean.

Problema batean zenbait atal badaude, atal guztiak berdin baloratuko dira.

Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

Balorazio positiboa merezi duten faktoreak

- Planteamendu zuzenak.
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza soilik zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzean dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

Balorazio negatiboa merezi duten faktoreak

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritiko edo sen on falta erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa -3,7 hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa 2,5 dela).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebazitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari den aldagaien esanahiarena.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzean dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

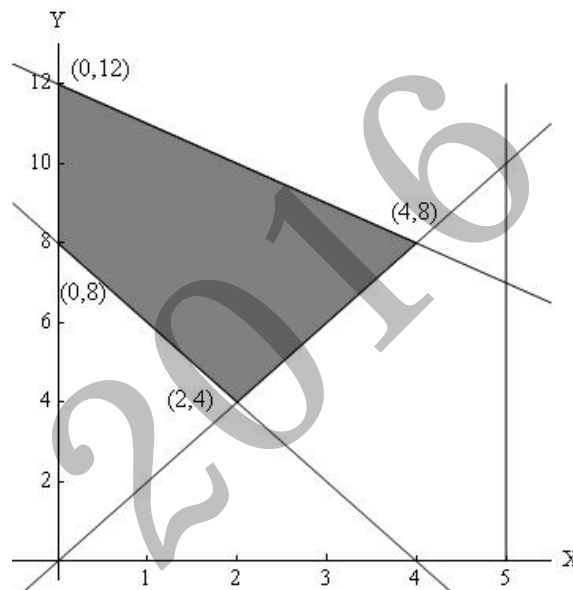
EBAZPENAK

A AUKERA

A 1 (Programazio linealezko problema baten ebazpena)

a) Problemaren murrizketa linealak eta soluzio eremua hauek dira:

- i) X autobus kopurua \leq autobuseko gidari kopurua: $0 \leq X \leq 5$,
- ii) Y mikrobus kopurua \leq mikrobusen gidari kopurua: $0 \leq Y \leq 12$,
- iii) Martxan dagoen autobus bakoitzagatik, mikrobus bat gutxiago: $Y \leq 12 - X$,
- iv) Mikrobus kopurua \geq autobus kopuru bikoitza: $2X \leq Y$,
- v) $40 \times$ autobusak $+ 20 \times$ mikrobusak ≥ 160 ikasle: $40X + 20Y \geq 160$.



b) $F(X, Y) = 120X + 80Y$ kostu funtzioaren minimoa $F(2, 4) = 560$ da $(X, Y) = (2, 4)$ -an.

A 2 (Funtzio baten parametroen, muturren eta definizio eremuaren kalkulua)

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{A}{10} = \frac{1}{2} \rightarrow A = 5 \\ g(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{B}{7 + \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 2B - 7 \\ f(5) = g(5) \rightarrow \frac{5}{14} = \frac{5B}{55 + \alpha} \rightarrow B = 4, \alpha = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{5}{x + 9} \\ g(x) = \frac{4x}{x^2 + 6x + 1} \end{array} \right.$$

b) Deribatuak kalkulatu $f(x)$ funtzioak muturrik ez daukala eta $g(x)$ funtzioak $x = 1$ puntuan máximoa eta $x = -1$ puntuan minimoa daukala froga dezakegu.

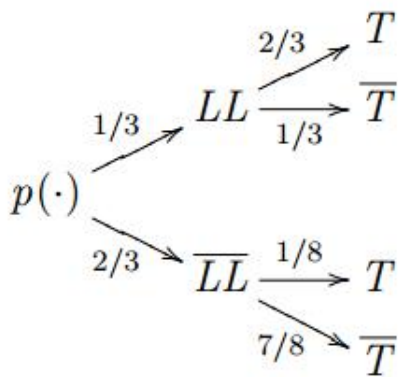
c) $f(x)$ -ren existentzi eremua $\mathbb{R} - \{-9\}$ da eta $g(x)$ -rena $\mathbb{R} - \{-3 - \sqrt{8}, -3 + \sqrt{8}\}$.



**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

A 3 (Probabilitate baten kalkulua, zuhaitz-diagramaren bidez eta probabilitate baldintzatuaren bidez ebazten dena)

Bitez $LL, \overline{LL}, T, \overline{T}$ eta T_i hurrenez hurren egun euritsua izateari, egun ez euritsua izateari, lanera berandu iristeari, lanera berandu ez iristeari eta i . egunean lanera berandu iristeari dagozkien gertaerak, orduan galdetutako probabilitateak hauek dira:



a)
$$p(T) = p(LL) \cdot p(T|LL) + p(\overline{LL}) \cdot p(T|\overline{LL})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{36}$$

b)
$$p(LL|T) = \frac{p(LL \cap T)}{p(T)} = \frac{2/9}{11/36} = \frac{8}{11}$$

c)
$$p(T_1|LL)p(\overline{T}_2|\overline{LL}) + p(\overline{T}_1|LL)p(T_2|\overline{LL})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

A 4 (Banaketa normalaren ulermena eta erabilpena)

$X = N(\mu, \sigma)$: luzera-jauziaren zorizko aldagaia da, μ batezbestekoa eta $\sigma = 0,6$ desbiderapen standara. $n = 400$ laginaren tamaina da eta $\bar{x} = 7,75$ bere batezbestekoa. Laginaren batezbestekoa $N\left(\mu, \frac{0,6}{20}\right)$ banaketa normalari jarraitzen dio.

a) μ -rentzako %95eko konfiantza-tartea:

$$\left(\bar{x} - z_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (7,69, 7,81) \text{ da.}$$

b) $|\mu - \bar{x}| \leq 1,65 \cdot \frac{0,6}{\sqrt{n}} \leq 0,04 \Rightarrow n \geq \left(\frac{1,65 \cdot 0,6}{0,04}\right)^2 = 612,5 \Rightarrow n \geq 613$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B AUKERA

B 1 (Kalkulu matrizialaren ariketa)

a) Ekuazio matrizialek ondoko sistema lineala ateratzen da:

$$\begin{cases} -2\beta = 2 \\ -4\alpha - 2\beta = u \\ 10\beta = v \\ 2\alpha + 6\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -6 \\ v = -10 \end{cases}$$

b) Ekuazioaren bi aldeko gaiak A matrizearengatik biderkatuz:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2b = 0 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

B 2 (Funtzio baten balioen kalkulua eta bere maximoarena. Interpretazioa)

a) $NC(10) = 80$. Prezioa gora egiten duen euro bakoitzagatik, lehen baino 10 kamiseta gutxiago salduko dira.

b) Diru sarrera: $I(x) = x(180 - 10x) = 180x - 10x^2$ da.

Deribatua $I'(x) = 180 - 20x$ da eta $I'(9) = 0, I''(x) = -20$. Odorioz diru sarrerarik handiena $x = 9$ balioan lortzen da, 90 kamiseta salduz.

c) $z = 180 - 10x$ unitatengatik kostua $C(x) = 4(180 - 10x) + 50 = 770 - 40x$ da.

irabazia = diru sarrera - kostua = $B(x) = -10x^2 + 220x - 770$ da.

Honen maximoa $B'(x) = -20x + 220 = 0 \Rightarrow x = 11$ eurotan lortuko da.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B 3 (Probabilitate baten kalkulua. Bi gertaera elkarren artean aske)

- a) Bi zenbakiak bakoitiak izateko aukerak: $\{1,1\}$, $\{3,3\}$, $\{5,5\}$, $\{1,3\}$, $\{3,1\}$, $\{1,5\}$, $\{5,1\}$, $\{3,5\}$ eta $\{5,3\}$. Kasu guztien probabilitateen batura:

$$p(\text{bakoitiak}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} + 2 \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{5}{12} \right) = \frac{64}{12^2} = 0,44$$

- b) Hiru zenbakien batura 6 izateko: $\{1,2,3\}$ zenbakien 6 permutazio gehi $\{1,1,4\}$ zenbakien 3 permutazio gehi $\{2,2,2\}$ zenbakien permutazio bat:

$$p(\text{batura} = 6) = 6 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{22}{12^3} = 0,0127$$

B 4 (Banaketa normalaren ulermena eta erabilpena)

$$X = N(\mu = 28, \sigma = 4) \Rightarrow Z = (X - 28)/4 = N(0,1)$$

- a) Abuztuko egun baten temperatura maximoa 32°C baino handiago izateko probabilitatea:

$$p(X > 32) = p(Z > 1) = 1 - p(Z \leq 1) = 0,1587$$

- b) Abuztuan 31 egun daude eta egun baten temperatura maximoa 25°C baino gutxiago izateko probabilitatea:

$$p(X < 25) = p(Z < -3/4) = 0,2266 \Rightarrow 31 \text{ egun bider } 0,2266 = 7,02 \sim 7 \text{ egun.}$$

- c) Abuztuko egun baten temperatura maximoa 28°C eta 32°C artean egoteko probabilitatea:

$$p(28 \leq X \leq 32) = p(0 \leq Z \leq 1) = 0,3413$$

- d) 95% probabilitateaz abuztuko egun baten temperatura maximoak gaindituko ez duen balioa hau da:

$$p(X < t) = 0,95 \Rightarrow p\left(\frac{X - 28}{4} \leq \frac{t - 28}{4}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{t - 28}{4} = 1,64 \Rightarrow t = 34,56^\circ\text{C}$$