

Matematika II

- BATXILERGOA
- LANBIDE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA ZIKLOAK



**UNIBERTSITATERA
SARTZEKO PROBAK**

UPV/EHU

2016



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2016ko EKAINA

MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JUNIO 2016

MATEMÁTICAS II

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu. Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 ariketa

Eztabaidatu sistema hau b parametroaren balioen arabera (EZ da inola ere beharrezkoa ebaztea).

$$x + 2y - z = 2$$

$$x + (1 + b)y - bz = 2b$$

$$x + by + (1 + b)z = 1$$

A2 ariketa

Zehaztu zer plano den koordenatu-jatorritik pasatzen dena, ekuazio hau duen zuzenaren paraleloa dena:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

eta $(0,1,1)$ eta $(1,1,0)$ puntuetatik pasatzen den zuzenaren paraleloa ere badena.

A3 ariketa

Azter ezazu funtzio honen goratze- eta beheratze-tarteak:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

eta kalkula itzazu haren maximoak eta minimoak.

A4 ariketa

Marratzu ezazu funtzio hauen grafikoek mugatutako esparrua:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{eta} \quad g(x) = -x + 3,$$

eta kalkula ezazu esparru horren azalera.

A5 ariketa

Serie hau 5en ondoz ondoko multiplo hauetaz osatuta dago:

$$45, 50, 55, \dots, 650, 655$$

- Zenbat zenbakiz osatuta dago seriea?
- Zein da haien batura?

B AUKERA

B1 ariketa

Matrize hau emanda:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Aurkitu ezazu a parametroaren zer baliotarako EZ duen alderantzizkorik matrizeak.
- Baldin eta existitzen bada, kalkula ezazu A -ren alderantzizkoa $a = 2$ baliorako.

B2 ariketa

Plano hau emanda $x - 3y + 2z = 7$:

- Zehaztu ezazu $(3, -8, 4)$ puntuaren puntu simetrikoa plano horrekiko.
- Kalkulatu bi puntu simetrikoen arteko distantzia.

B3 ariketa

Funtzio hau emanda: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$

- Kalkulatu A , B eta C parametroen balioak, funtzioak propietate hauek bete ditzan:
 - $(0,0)$ puntutik pasatzea.
 - Maximo lokal bat izatea $(1,2)$ puntuan.
- Kalkula itzazu x aldagaiaren balio guztiak zeinetan funtzioaren grafikoak ukitzaila horizontala baitu.

B4 ariketa

Kalkula ezazu integral hau:

$$\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x^2 + x - 2)} dx.$$

B5 ariketa

Antzoki batean hiru eserleku mota daude, eta A , B eta C izendatuko ditugu. A motakoek 24 euro balio dute, B motakoek 20 euro eta C motakoek 15 euro. Antzokiak, guztira, 400 eserleku ditu, eta haien % 80 saldu dira. Guztira, 5.940 euro jaso dira. Badakigu saldutako eserlekuetan A motakoak halako bi direla B motakoak. Mota bakoitzeko zenbat eserleku saldu dira?



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ariketa (2 puntu)

- Sistemaren matrizea lortzea, haren determinantea kalkulatzeko eta determinantea zero izatea dakarten balioak lortzea (1 puntu)
- Kasu bakoitza eztabaidatzea.
 - $b \neq 0$ kasua (0, 4 puntu)
 - $b = 0$ kasua (0, 3 puntu)
 - $b = 1$ kasua (0, 3 puntu)

A.2 ariketa (2 puntu)

- Bi puntuetatik pasatzen den zuzena lortzea (1 puntu)
- Problema modu egokian planteatzea eta plano zuzen lortzea (1 puntu)

A.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua ondo lortzea (0,5 puntu)
- Puntu kritikoak lortzea eta haietako bakoitzaren izaera eztabaidatzea (1 puntu)
- Goratze-tarteak lortzea (0,5 puntu)

A.4 ariketa (2 puntu)

Probleman puntuak lortzeko, hau hartuko da kontuan:

- Emandako parabola eta zuzena marraztea eta esparrua lortzea (1 puntu)
- Esparruaren azalera lortzea Barrow-ren erregela aplikatuz (1 puntu)

A.5 ariketa (2 puntu)

- Ondoz ondoko multiploen kopurua lortzea (0,5 puntu)
- Multiploen batura kalkulatzeko, edozein metodo erabiliz (saiakuntza eta errakuntza, formula, etab.) (1,5 puntu)



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B AUKERA

B.1 ariketa (2 puntu)

- Matrizearen determinantea ebaztea (0,5 puntu)
- Bi kasuak eztabaidatzea (1 puntu)
- Alderantzizko matrizea kalkulatzeko $a = 2$ baliorako (0,5 puntu)

B.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea eta P' puntua (P -ren simetrikoa planoarekiko) lortzea. (1,25 puntu)
- Bi puntu simetrikoen arteko distantzia kalkulatzeko (0,75 puntu)

B.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea (0,5 puntu)
- Parametroak ondo lortzea dagozkion baldintzak jarrita (1,5 puntu)

B.4 ariketa (2 puntu)

- Integrala frakzio sinpletan behar bezala deskonposatzea (1 puntu)
- Hiru integral txikiak kalkulatzeko (1 puntu)

B.5 ariketa (2 puntu)

- Problema ekuazio-sistema baten bidez planteatzea (1 puntu)
- Sistema zuzen ebaztea (1 puntu)



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPIDEAK

A.1 ariketa

Sistemaren determinantea $2b^2 - 2b$ da. Zerora berdinduz, $b = 0$ eta $b = 1$ balioak lortuko ditugu. Beraz:

- $b \neq 0, 1$ denean, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da
- $b = 0$ denean, matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena, berriz, 3 da; beraz, kasu honetan, sistema BATERAEZINA da.
- $b = 1$ denean, matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena ere 2 da (lehenengo eta bigarren errenkadak bat datoz); beraz, heina aldagai kopurua baino txikiagoa denez ($2 < 3$), sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da, eta, kasu horretan, parametro bat behar da ebatziko bada.

A.2 ariketa

Lehen zuzenaren bektore zuzentzailea $v(1,-1,1)$ da, eta bigarren zuzenaren bektore zuzentzailea $w(-1,0,1)$ da. Planoaren bektore normala aurreko bektoreen biderkadura bektoriala da. Beraz, $n = v \times w = (-1, -2, -1)$. Horrenbestez, hau da eskatutako planoaren ekuazioa: $x + 2y + z = 0$

A.3 ariketa

Garbi dago funtzioa ez dela existitzen $x = 2$ eta $x = -2$ balioetarako eta, gainera, koordenatu-jatorritik pasatzen den funtzio bakoiti bat dela. Goratze-tarteak kalkulatzeko, beharrezkoa da funtzio horren deribatua lortzea. Hau da deribatua:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x(x^3)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Deribatua zero da balio hauetarako: $x = 0, x = 2\sqrt{3}, x = -2\sqrt{3}$

Goratze-tarteak (y' positiboa da) hauek dira:

$$(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$$

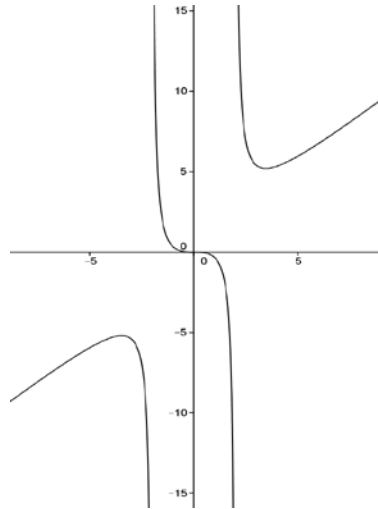
Beheratze-tarteak (y' negatiboa da) hauek dira:

$$(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, +2) \cup (2, +2\sqrt{3})$$

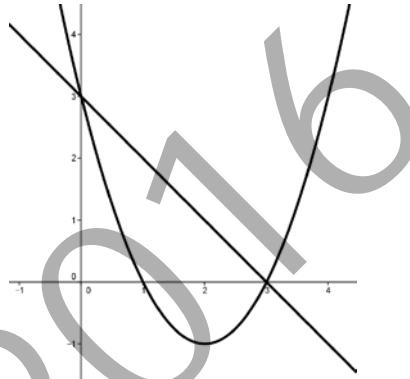
- Maximo lokala balio honekin lortzen da: $x = -2\sqrt{3}$
- Minimo lokala balio honekin lortzen da: $x = 2\sqrt{3}$
- $x = 0$ balioan, ez da maximoa ez minimoa.

Hau da funtzioaren grafikoa:

**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**



A.4 ariketa



Bi grafikoen ebakitze-puntuak $x = 0$ eta $x = 3$ dira. Hau da eskatutako azalera:

$$A = \int_0^3 [(-x + 3) - (x^2 - 4x + 3)] dx = 9/2 = 4.5$$

A.5 ariketa

a) 5en multiploen serie osoa kontuan harturik, 5 zenbakitik hasita, hau idatz dezakegu:

$$1 \times 5, 2 \times 5, \dots, 8 \times 5, 9 \times 5, \dots, 131 \times 5,$$

eta, jakina, 5en ondoz ondoko 131 multiplo ditu.

Emandako serieak aurreko zenbaki guztiak ditu, lehenengo 8ak izan ezik; beraz, guztira, 5en multiplo diren $131 - 8 = 123$ zenbaki daude.

b) Hau da eskatutako batura:

$$S = \frac{(45 + 655)}{2} \cdot 123 = 43050$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPIDEAK

B.1 ariketa

- a) Alderantzizkorik EZ izateko, bete behar da haren matrizearen determinantea zero izatea. Beraz: $(a-1)(3a-2) = 0$. Hau da, matrizeak ez du alderantzizkorik $a = 1$, $a = 2/3$ balioetarako.
- b) Hau da alderantzizko matrizea $a = 2$ kasurako:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

B.2 ariketa

- a) $(1, -3, 2)$ bektorea emandako planoarekiko normala da. Beraz, emandako $(3, -8, 4)$ puntutik pasatzen den eta planoarekiko perpendikularra den zuzenaren ekuazioa lor dezakegu. Parametrikotetan, hau da zuzenaren ekuazioa:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -8 - 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Orain, zuzenaren eta planoaren arteko ebakiduraren baldintza ezarriko dugu.

$$3 + t + 24 + 9t + 8 + 4t = 7 \Rightarrow 14t = -28 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow M(1, -2, 0)$$

Emandako puntua eta beraren simetrikoa muturtzat dituen zuzenkiaren erdiko puntua M denez, horrek aukera emango digu P -ren simetrikoa lortzeko. Hau izango da: $P'(-1, 4, -4)$

- b) Puntu simetrikoen arteko distantzia kalkulatzeko, bi modu ditugu: puntu horien arteko distantzia lortzea edo hasierako puntutik planorainoko distantzia bikoiztea. Hau da emaitza:

$$PP' = 2\sqrt{2^2 + 6^2 + 4^2} = 2\sqrt{56} = 4\sqrt{14}.$$

B.3 ariketa

- a) Baldintzak ezarrita, $C = 0$ lortzen da; A eta B parametroek sistema betetzen dute:
 $3A + 2B = 0$; beraz: $A = -4$ eta $B = 6$.
 $A + B = 2$

- b) Funtzioa deribatu eta zerora berdintzen badugu, ukitzaila horizontaleko puntuak lortuko ditugu. Beraz: $y' = -12x^2 + 12x = 0$, eta hortik: $x = 0$ (minimoa) eta $x = 1$ (maximoa)



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.4 ariketa

Frakziotan deskonposatuta, hau izango dugu:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x(x^2 + x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Beraz:

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

Koefizienteak kalkulatu, hau izango dugu: $A = 1/2$, $B = 2$, $C = -1/2$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x) + 2 \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+2) + C \end{aligned}$$

B.5 ariketa

A , B eta C motako eserleku kopuruak x , y eta z izanik, hurrenez hurren. 400en % 80 = 320 eserleku denez, sistema hau planteatu dezakegu:

$$x + y + z = 320$$

$$2x = y$$

$$24x + 20y + 15z = 5940$$

Ebatzita:

$$x = A \text{ motako } 60 \text{ eserleku}$$

$$y = B \text{ motako } 120 \text{ eserleku}$$

$$z = C \text{ motako } 140 \text{ eserleku}$$