

# Matematika II

- BATXILERGOA
- LANBIDE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA ZIKLOAK



**UNIBERTSITATERA  
SARTZEKO PROBAK**

**UPV/EHU**

**2016**

***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.  
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

***Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.  
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

**A AUKERA**

**A1 ariketa**

Eztabaidatu nola jokutzen duen sistema honek  $b$  parametroaren balioen arabera.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\ -x + 2y + bz &= -3 \\ x - 2y - z &= b\end{aligned}$$

Aurkitu soluzioa, baldin eta soluzioa badu,  $b = 2$  kasurako.

**A2 ariketa**

Kalkulatu zer distantzia dagoen  $(4, 4, 3)$  koordenatuak dituen  $A$  puntutik  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(1, 0, 1)$  eta  $D(0, 1, 1)$  puntuetatik pasatzen den planora.

**A3 ariketa**

Kalkula itzazu  $A$ ,  $B$ ,  $C$  eta  $D$  balioak funtzio honek

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

mutur erlatiboak izan ditzan  $(0,0)$  eta  $(2,2)$  puntuetan.

**A4 ariketa**

Kalkula itzazu integral hauek:

$$\text{a) } \int \frac{5dx}{x^2 - 3x + 2} \qquad \text{b) } \int (2x + 1)^4 dx.$$

**A5 ariketa**

Kalkula ezazu zein den zenbaki honen batekoen zifra:

$$N = 3^{2016} + 2^{2016}.$$

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

**B AUKERA**

**B1 ariketa**

Zehaztu ezazu  $A$  matrizearen heina  $a$  parametroaren balioen arabera:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ a & a-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Baldin eta existitzen bada, kalkula ezazu  $A$ -ren alderantzizkoa  $a = 1$  baliorako. Alderantzizko hori existitzen ez bada, azaldu ezazu zergatia.

**B2 ariketa**

Izan bedi  $r$  zuzen bat puntu haueetatik pasatzen dena:  $P(1,2,3)$  eta  $Q(-1,0,1)$ .

- Zehaztu ezazu zer ekuazio izango duen plano batek, baldin eta  $r$  zuzenarekiko perpendikularra bada eta  $A(4,-2,-1)$  puntutik pasatzen bada.
- Zehaztu ezazu zer ekuazio izango duen plano batek, baldin eta  $r$  zuzenarekiko perpendikularra bada eta  $B(2, 1, -3)$  puntutik pasatzen bada.
- Kalkula ezazu bi plano horien arteko distantzia.

**B3 ariketa**

Funtzio polinomiko hau emanda:

$$P(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} :$$

- Kalkula itzazu  $P(x)$ -ren goratze- eta beheratze-tarteak.
- Aurkitu haren maximoak eta minimoak.
- Ba al da  $x$ -ren balioen bat  $P(x) < 0$  izatea dakarrena? Arrazoitu zergatia.

**B4 ariketa**

Funtzio hauek emanda:

$$y = 9 - x^2 \quad \text{eta} \quad y = 2x + 1$$

- Marratzu ezazu haien grafikoek mugatutako esparrua.
- Kalkula ezazu esparru horren azalera.

**B5 ariketa**

Argazki angeluzuzen bat handitu egin dugu; orain, haren luzera eta zabalera jatorrizkoak baino % 20 handiagoak dira. Argazki berriak 432 zentimetro karratuko azalera baldin badu, zer azalera zuen jatorrizko argazkiak?



## CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

### MATEMATIKA II

#### EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

#### Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

##### A AUKERA

###### A.1 ariketa (2 puntu)

- Sistemaren matrizea lortzea, haren determinantea kalkulatzeko eta balioak lortzea eta eztabaidatzea (1,5 puntu)
- Zuzen ebaztea  $b = 2$  kasua (0,5 puntu)

###### A.2 ariketa (2 puntu)

- Hiru puntuetatik pasatzen den planoaren lortzea (1,25 puntu)
- Puntuaren eta planoaren arteko distantzia kalkulatzeko (0,75 puntu)

###### A.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea (0,5 puntu)
- Parametroak ondo lortzea dagozkion baldintzak jarrita (1,5 puntu)

###### A.4 ariketa (2 puntu)

- Integral bakoitza lortzea (1 puntu); guztira, 2 puntu

###### A.5 ariketa (2 puntu)

- Bi kasuetan amaiera errepikatzea dakarren erregela lortzea (1 puntu)
- Zuzen ebaztea, lortutako erregela aplikatuz (1 puntu)



## CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

### B AUKERA

#### B.1 ariketa (2 puntu)

- Matrizearen determinantea ebaztea (0,5 puntu)
- Bi kasuak eztabaidatzea (1 puntu)
- Alderantzizko matrizea kalkulatzeko  $a = 1$  baliorako (0,5 puntu)

#### B.2 ariketa (2 puntu)

- PQ zuzena lortzea (0,75 puntu)
- Plano bakoitza zehaztea (0,25 puntu) - Guztira, 0,5 puntu
- Planoen arteko distantzia kalkulatzeko (0,75 puntu)

#### B.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea (0,5 puntu)
- Maximoak eta minimoak lortzea (0,75 puntu)
- Goratze- eta beheratze-tarteak lortzea (0,5 puntu)
- Arrazoitzea ez dagoela  $x$  punturik  $P(x) < 0$  izatea dakarrenik (0,25 puntu)

#### B.4 ariketa (2 puntu)

Probleman puntuak lortzeko, hau hartuko da kontuan:

- Emandako parabola eta zuzena marraztea eta esparrua lortzea (1 puntu)
- Esparruaren azalera lortzea Barrowren erregela aplikatuz (1 puntu)

#### B.5 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea (1 puntu)
- Problema zuzen ebaztea (1 puntu)



## CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

### EBAZPIDEA

#### A.1 ariketa

Sistemaren determinantea  $3b - 3$  da. Zerora berdinduz,  $b = 1$  balioa lortuko dugu. Beraz:

- $b \neq 1$  denean, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da
- $b = 1$  denean, matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena, berriz, 3 da; beraz, kasu honetan, sistema BATERAEZINA da.
- $b = 2$  kasurako. Sistema ebatzita, emaitza hau lortzen da:  $x = 1, y = 0, z = -1$ .

#### A.2 ariketa

$B, C$  eta  $D$  puntuetatik pasatzen den planoaren modu askotan lor daiteke. Hau da haietako bat:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantea ebatzita, planoaren ekuazioa lortuko dugu:  $x + y + z - 2 = 0$ .  $A$  puntuaren eta planoaren arteko distantzia kalkulatzeko, formula aplikatuko dugu.

$$d(A, \text{Planoa}) = \frac{|4 + 4 + 3 - 2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

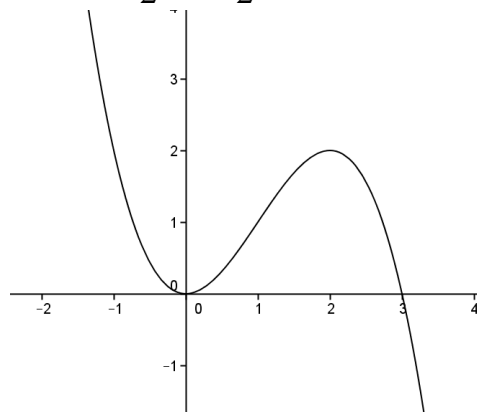
#### A.3 ariketa

Hau da funtzioaren deribatua:  $f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$ .  $(0,0)$  eta  $(2,2)$  puntuetan mutur erlatiboak izan beharraren baldintza ezarrita, hau lortuko dugu:

$$C = 0 \text{ eta } 0 = 12A + 4B,$$

eta  $(0,0)$  eta  $(2,2)$  puntuetatik pasatu beharraren baldintza ezarrita, hau lortuko dugu:  $D = 0$  eta  $2 = 8A + 4B$ . Eta, ebatzita, hau lortuko dugu:

$$A = -\frac{1}{2}; B = \frac{3}{2}; C = 0; D = 0$$





### CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

#### A.4 ariketa

a)  $\int \frac{5dx}{x^2 - 3x + 2}$  integrala arrazionala da, bi integraletan deskonposa daiteke.

$$\int \frac{5dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \frac{-5}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-2} dx = -5 \ln(x-1) + 5 \ln(x-2) + C.$$

b) Bigarren integrala, aldagai-aldaketa baten bidez,  $2x+1=t$ , berehalako integral bihurtzen da:

$$\frac{1}{2} \int t^4 dx = \frac{(2x+1)^5}{5} + C.$$

#### A.5 ariketa

2ren eta 3ren ondoz ondoko berreturen amaierari erreparatuta, hau lortuko dugu:

$3^1 = 3$	$2^1 = 2$
$3^2 = 9$	$2^2 = 4$
$3^3 = 27$	$2^3 = 8$
$3^4 = 81$	$2^4 = 16$
.....	.....
$3^5 = 243$	$2^5 = 32$
$3^6 = 729$	$2^6 = 64$

Horrek adierazten du bi berreturak 4ko *ziklotan* errepikatuz joaten direla. Beraz, baldin eta 2016 4z zatitzen badugu eta hondarrari erreparatzen badiogu (zero da), problema ebartziko dugu.

Hau da,  $3^{2016}$ ren batekoen zifra 1 da, eta  $2^{2016}$ ren batekoen zifra 6 da. Beraz,  $N = 3^{2016} + 2^{2016}$ ren batekoen zifra 7 da.





## EBAZPIDEA

### B.1 ariketa

Heina kalkulatzeko, matrizearen determinantea kalkulatu dugu. Gure kasuan:

$$|A| = 2a^2 - 3a + 1$$

Zerora berdinduz, hau lortuko dugu:  $a = 1$  eta  $a = 1/2$ . Beraz:

- Baldin  $a \neq 1, 1/2$ , orduan  $A$  matrizearen heina 3 da
- Baldin  $a = 1$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , eta, erraz ikusten den moduan, heina 2 da
- Baldin  $a = 1/2$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & -5/2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , eta heina 2 da, kasu honetan ere.

Haren alderantzizkoa ezin da lortu  $a = 1$  kasurako, zeren eta  $A$ -ren determinantea zero baita.

### B.2 ariketa

a)  $r$ -ren norabide-bektore bat  $(2, 2, 2)$  da, eta, oro har,  $r$ -rekiko perpendikularra den plano batek ekuazio hau izango du:  $2x + 2y + 2z + D = 0$ . Lehen planoaren puntu honetatik pasatzen da:  $(4, -2, -1)$ :  $8 - 4 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 2$ ; beraz:  $2x + 2y + z + 2 = 0$ . Bigarren planoaren puntu honetatik pasatzen da:  $(2, -1, -3)$ :  $4 - 2 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 4$ ; beraz:  $2x + 2y + z + 4 = 0$

b) Planoak paraleloak dira. Beraz, hau da haien arteko distantzia:

$$d = \left| \frac{D - D'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{4 - 2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{3}$$

Kalkulatzeko beste modu bat: planoetako bateko puntu batetik beste planorainoko distantzia kalkulatzeko.

### B.3 ariketa

Problema ebazteko,  $P(x)$  funtzioa deribatuko dugu, eta hau lortuko:

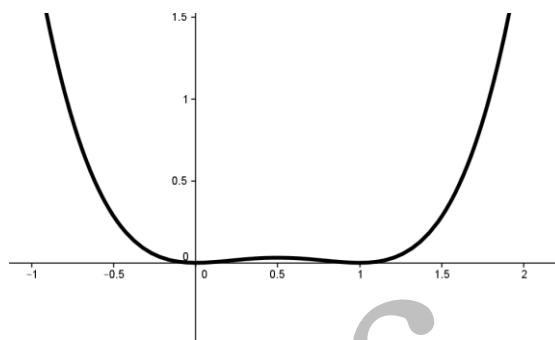
$P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ . Zerora berdinduz, hiru balio lortuko ditugu.  $x = 0$ ,  $x = 0,5$  eta  $x = 1$ . Beraz,  $P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = 2x(x - 0,5)(x - 1)$ .

a) Hauek izango dira tartekak:

- Goratzea:  $(0, 0,5) \cup (1, +\infty)$
- Beheratzea:  $(-\infty, 0) \cup (0,5, 1)$

## CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

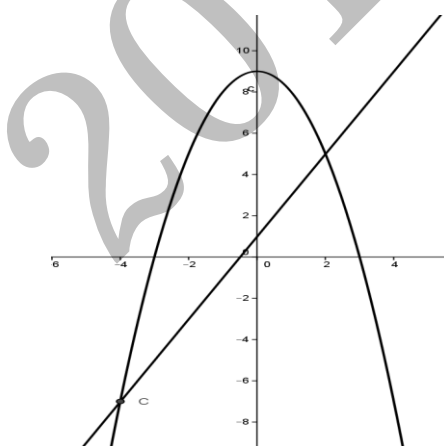
- b) Erraz frogatzen da  $x = 0$  eta  $x = 1$  balioetan funtzioak minimo bat duela, eta  $x = 0,5$  balioan funtzioak maximo bat duela.
- c) Minimoak  $x = 0$  eta  $x = 1$  puntuetan lortzen direnez eta bietan balioak  $P(0) = P(1) = 0$  direnez, funtzioa zero edo handiagoa izango da  $x$ -ren edozein baliotarako. Beraz, ez dago  $x$ -ren baliorik  $P(x) < 0$  betetzen duenik



### B.4 ariketa

Zuzen batek eta parabola batek mugatutako esparru bat da. Haren ebakipuntuak hauek dira:

$x = -4$  eta  $x = 2$ . Ikus daitekeen bezala, parabola zuzenaren gainean dago eskatutako eskualdean.



Hau da eskatutako azalera:

$$A = \int_{-4}^2 (9 - x^2 - 2x - 1) dx = 36 \text{ unitate karratu.}$$

### B.5 ariketa

Jatorrizko argazkiaren dimentsioak  $x$  eta  $y$  izanik, argazki berriaren dimentsioak  $1,2x$  eta  $1,2y$  izango dira. 432 zentimetro karratuko azalera duenez, ekuazio honetara iritsiko gara:

$$(1,2x)(1,2y) = 432.$$

Azkenik, jatorrizko azalera lortuko dugu:  $x \cdot y = \frac{432}{(1,2)(1,2)} = 300$  zentimetro karratu.