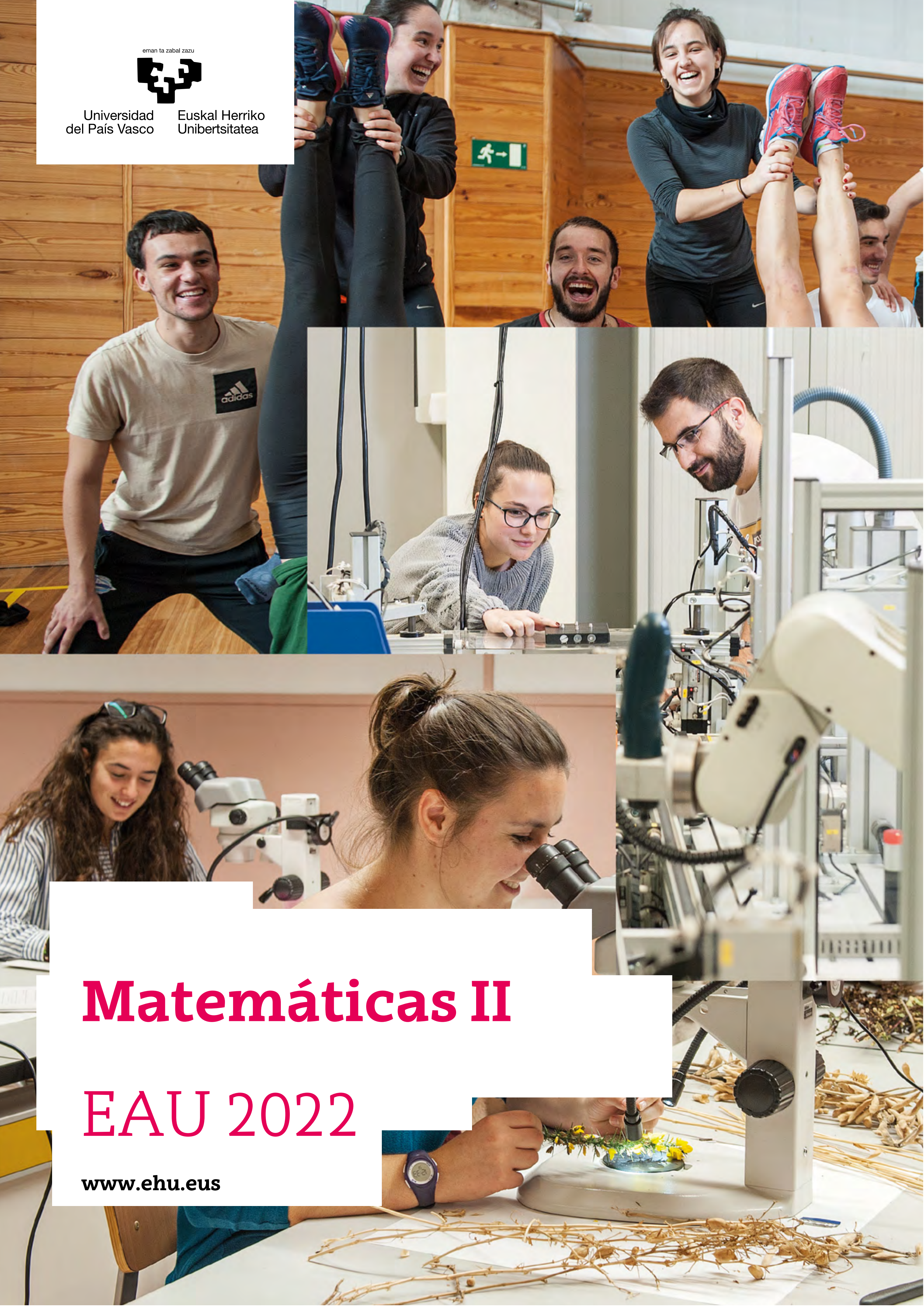
eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea



Matemáticas II

EAU 2022

www.ehu.eus

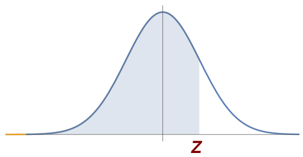
Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0’00	0’01	0’02	0’03	0’04	0’05	0’06	0’07	0’08	0’09
0’0	0’5000	0’5040	0’5080	0’5120	0’5160	0’5199	0’5239	0’5279	0’5319	0’5359
0’1	0’5398	0’5438	0’5478	0’5517	0’5557	0’5596	0’5636	0’5675	0’5714	0’5753
0’2	0’5793	0’5832	0’5871	0’5910	0’5948	0’5987	0’6026	0’6064	0’6103	0’6141
0’3	0’6179	0’6217	0’6255	0’6293	0’6331	0’6368	0’6406	0’6443	0’6480	0’6517
0’4	0’6554	0’6591	0’6628	0’6664	0’6700	0’6736	0’6772	0’6808	0’6844	0’6879
0’5	0’6915	0’6950	0’6985	0’7019	0’7054	0’7088	0’7123	0’7157	0’7190	0’7224
0’6	0’7257	0’7291	0’7324	0’7357	0’7389	0’7422	0’7454	0’7486	0’7517	0’7549
0’7	0’7580	0’7611	0’7642	0’7673	0’7704	0’7734	0’7764	0’7794	0’7823	0’7852
0’8	0’7881	0’7910	0’7939	0’7967	0’7995	0’8023	0’8051	0’8078	0’8106	0’8133
0’9	0’8159	0’8186	0’8212	0’8238	0’8264	0’8289	0’8315	0’8340	0’8365	0’8389
1’0	0’8413	0’8438	0’8461	0’8485	0’8508	0’8531	0’8554	0’8577	0’8599	0’8621
1’1	0’8643	0’8665	0’8686	0’8708	0’8729	0’8749	0’8770	0’8790	0’8810	0’8830
1’2	0’8849	0’8869	0’8888	0’8907	0’8925	0’8944	0’8962	0’8980	0’8997	0’9015
1’3	0’9032	0’9049	0’9066	0’9082	0’9099	0’9115	0’9131	0’9147	0’9162	0’9177
1’4	0’9192	0’9207	0’9222	0’9236	0’9251	0’9265	0’9279	0’9292	0’9306	0’9319
1’5	0’9332	0’9345	0’9357	0’9370	0’9382	0’9394	0’9406	0’9418	0’9429	0’9441
1’6	0’9452	0’9463	0’9474	0’9484	0’9495	0’9505	0’9515	0’9525	0’9535	0’9545
1’7	0’9554	0’9564	0’9573	0’9582	0’9591	0’9599	0’9608	0’9616	0’9625	0’9633
1’8	0’9641	0’9649	0’9656	0’9664	0’9671	0’9678	0’9686	0’9693	0’9699	0’9706
1’9	0’9713	0’9719	0’9726	0’9732	0’9738	0’9744	0’9750	0’9756	0’9761	0’9767
2’0	0’9772	0’9778	0’9783	0’9788	0’9793	0’9798	0’9803	0’9808	0’9812	0’9817
2’1	0’9821	0’9826	0’9830	0’9834	0’9838	0’9842	0’9846	0’9850	0’9854	0’9857
2’2	0’9861	0’9864	0’9868	0’9871	0’9875	0’9878	0’9881	0’9884	0’9887	0’9890
2’3	0’9893	0’9896	0’9898	0’9901	0’9904	0’9906	0’9909	0’9911	0’9913	0’9916
2’4	0’9918	0’9920	0’9922	0’9925	0’9927	0’9929	0’9931	0’9932	0’9934	0’9936
2’5	0’9938	0’9940	0’9941	0’9943	0’9945	0’9946	0’9948	0’9949	0’9951	0’9952
2’6	0’9953	0’9955	0’9956	0’9957	0’9959	0’9960	0’9961	0’9962	0’9963	0’9964
2’7	0’9965	0’9966	0’9967	0’9968	0’9969	0’9970	0’9971	0’9972	0’9973	0’9974
2’8	0’9974	0’9975	0’9976	0’9977	0’9977	0’9978	0’9979	0’9979	0’9980	0’9981
2’9	0’9981	0’9982	0’9982	0’9983	0’9984	0’9984	0’9985	0’9985	0’9986	0’9986
3’0	0’9987	0’9987	0’9987	0’9988	0’9988	0’9989	0’9989	0’9989	0’9990	0’9990
3’1	0’9990	0’9991	0’9991	0’9991	0’9992	0’9992	0’9992	0’9992	0’9993	0’9993
3’2	0’9993	0’9993	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9995	0’9995	0’9995
3’3	0’9995	0’9995	0’9995	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9997
3’4	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9998
3’5	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998
3’6	0’9998	0’9998	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’7	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’8	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’9	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha, \\ 2x + \alpha y + \alpha z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1. \end{cases}$$

Resuelve el sistema para $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$, si es posible.

Ejercicio B1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determina para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

(b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 0$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Se consideran la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = 0; \end{cases}$$

y el plano $\pi \equiv x+y+z-2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Ejercicio B2

Sean el punto $P = (1, 2, a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto al plano π.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = (x-1)^2 e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que f se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta $y = 2x + 1$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\displaystyle\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}\, dx$.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras:

T: 4 bolas negras y 6 blancas,

R: 7 bolas negras y 3 blancas.

Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:

(a) sean negras,

(b) sean blancas,

(c) sean de distinto color.

Ejercicio B5

El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

(a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendida entre 50 y 68 gramos.

(b) Si el 30 % de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

MATEMÁTICAS II - ORDINARIA - 2022

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2,5 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.
7. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

A1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos en los que no se anula el determinante (1 punto).
- Discusión y resolución para el caso de $\alpha = 1$ (0,75 puntos).
- Resolución para el caso $\alpha = -1$ (0,75 punto).

B1.

- Resolución correcta del apartado (a) (1,25 puntos).
- Resolución correcta del apartado (b) (1,25 puntos).

A2.

- Planteamiento del problema: obtener las ecuaciones de la distancia del punto al origen de coordenadas y la del punto al plano (1 punto).
- Cálculo de los valores de t para que las distancias del punto al origen de coordenadas y del punto al plano sean iguales (1 punto).
- Cálculo de las coordenadas de los puntos que cumplen la condición impuesta (0,5 puntos).

B2.

- Cálculo correcto de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P (0,75 puntos).
- Cálculo correcto del punto de intersección del plano con la recta perpendicular al mismo (0,75 puntos).
- Cálculo de las coordenadas del punto simétrico (1 punto).

A3.

- Cálculo de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (1 punto).
- Cálculo de los extremos (1 punto).

B3.

- Planteamiento correcto de las condiciones que deben cumplir los parámetros A, B y C (2 puntos).
- Cálculo correcto de los parámetros A, B y C (0,5 puntos).

A4.

- Descomposición del integrando en fracciones simples (1,5 puntos).
- Cálculo de la integral (1 punto).

B4.

- Dibujo adecuado del recinto y cálculo de los puntos de corte de las gráficas (1,25 puntos).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1,25 puntos).

A5.

- Resolución correcta del apartado (a) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado (b) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado (c) (0,5 puntos).

B5.

- Resolución correcta del apartado (a) (1,25 puntos).
- Resolución correcta del apartado (b) (1,25 puntos).

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $2\alpha - 2$. Por tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si $\alpha = 1$, la matriz de coeficientes tiene rango 2, y el de la matriz ampliada también; por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO. La solución del sistema es $(0, y, 1-y)$, siendo $y \in \mathbb{R}$ cualquiera.

Si $\alpha = -1$, la solución del sistema es $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$.

SOLUCIÓN B1

El determinante de la matriz A es $2(m-1)(m-2)$; por tanto, si $m = 1$ o $m = 2$, la matriz A no tiene inversa.

Si $m = 0$, $|A| = 4 \neq 0$; por tanto, A tiene matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN A2

Un punto genérico de la recta es de la forma $P = (t, 2t, 0)$. La distancia entre el origen de coordenadas $O = (0,0,0)$ y el puntu P es el módulo del vector $\vec{OP}$, dist $(O, P) = |t|\sqrt{5}$; y la distancia entre el punto P y el plano es dist $(P, \pi) = \dfrac{|3t-2|}{\sqrt{3}}$.

Los valores de t que verifican $|t|\sqrt{5} = \dfrac{|3t-2|}{\sqrt{3}}$ son $t = \dfrac{2}{3-\sqrt{15}} = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{3}$ y $t = \dfrac{2}{3+\sqrt{15}} = \dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$.

Las coordenadas de los puntos que cumplen la condición impuesta son :

$$\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3}, \frac{-6-2\sqrt{15}}{3}, 0\right) \quad \text{eta} \quad \left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}, \frac{-6+2\sqrt{15}}{3}, 0\right).$$

SOLUCIÓN B2

La recta r que para por el punto P y es perpendicular al plano π tiene ecuaciones paramétricas: $\{1+t, 2+t, a+2t\}$.

El punto de corte del plano y la recta r es $M = \left(\frac{3-a}{3}, \frac{6-a}{3}, \frac{a}{3}\right)$. Por último, el punto simétrico es $P' = \left(\frac{3-2a}{3}, \frac{6-2a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$.

SOLUCIÓN A3

$f'(x) = 2(x-1)(2-x)e^{-2x}$, por tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$; y es creciente en el intervalo $(1, 2)$. f tiene un máximo en el punto $x = 2$ y un mínimo en el punto $x = 1$.

SOLUCIÓN B3

Para que f sea nula en el punto $x = 1$, se tiene que cumplir $1 + A + B + C = 0$.

Para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta $y = 2x + 1$, se tiene que cumplir

$$\begin{cases} f'(-1) = 3 - 2A + B = 2, \\ f'(3) = 27 + 6A + B = 2. \end{cases}$$

Resolviendo este último sistema, $A = -3$ y $B = -7$. Sustituyendo esos valores en la acuación anterior, se obtiene $C = 9$.

SOLUCIÓN A4

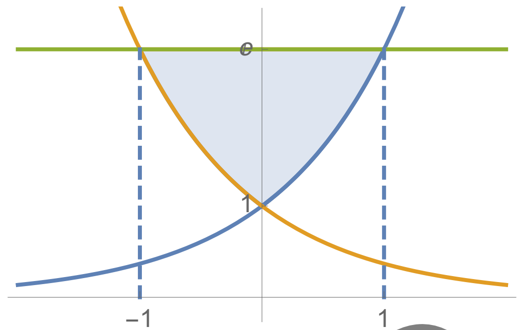
En primer lugar, hay que descomponer el integrando en fracciones simples:

$$\frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Haciendo las operaciones, se obtiene que $A = -3$, $B = -2$ y $C = 3$. Entonces,

$$\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} = -3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + 3\ln|x-2| + K.$$

SOLUCIÓN B4



Las curvas $y = e^x$ e $y = e$ se cortan en el punto $x = 1$; y las curvas $y = e^{-x}$ e $y = e$, en el punto $x = -1$.

El área del recinto se calcula como sigue:

$$A = \int_{-1}^{0} (e - e^{-x})\, dx + \int_{0}^{1} (e - e^{x})\, dx = 2\ u^2.$$

SOLUCIÓN A5

(a) $P(\text{dos bolas negras}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{8}{11} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{5}{11} = \dfrac{67}{220}.$

(b) $P(\text{dos bolas blancas}) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{4}{11} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{7}{11} = \dfrac{45}{220}.$

(c) $P(\text{dos bolas de distinto color}) = 1 - P(\text{dos bolas del mismo color})$
$= 1 - \left(\dfrac{67}{220} + \dfrac{45}{220}\right) = \dfrac{108}{220} = \dfrac{27}{55}.$

SOLUCIÓN B5

(a) $P(50 < X < 68) = P(-0,31 < Z < 2,46) = 0,9931 - (1 - 0,6217) = 0,6148.$

(b) $P(X > \alpha) = 0,3 \implies 1 - P\Big(Z < \dfrac{\alpha - 52}{6,5}\Big) = 0,3 \implies \dfrac{\alpha - 52}{6,5} = 0,52$
$\implies \alpha = 55,38.$

El 30 % de las piezas fabricadas está por encima de 55,38 gramos.