eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II

USE 2022

www.ehu.eus

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde guztietan kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

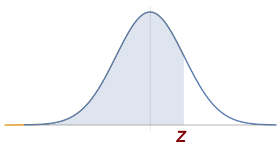
eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2022ko EZOHIKOA | *EXTRAORDINARIA 2022*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Eztabaidatu honako ekuazio linealetako sistema honen soluzioen existentzia α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 2z = 2, \\ 2x + 2y - 2z = \alpha, \\ \alpha x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

Ebatzi sistema $\alpha = 1$ kasuan, ahal bada.

B1 Ariketa

Kalkulatu era arrazoituan, propietate egokiak erabiliz,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

determinantearen balioa, jakinda honako hau betetzen dela:

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6.$$

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bedi honako ekuazioetako zuzena:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + \alpha y + z = 1, \\ 2x + 6y - 2z = 6. \end{cases}$$

Existitzen da α parametroaren baliorik zeinetarako $\pi \equiv x + y + z = 1$ planoak zuzena barnean duen? Arrazoitu zure erantzuna.

B2 Ariketa

Aurkitu r zuzenaren ekuazio parametrikoak, r honako zuzen hau izanik:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Existitzen da s-ren baliorik zeinetarako $(-3, s, s)$ puntua r zuzenean dagoen? Arrazoitu zure erantzuna.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Kalkulatu $y = 3x - 2$ zuzenarekiko paraleloak diren $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak. Aztertu f-ren gorakortasun- eta beherakortasuntarteak.

B3 Ariketa

Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax, & x \leq 1 \text{ bada,} \\ Bx - A, & x > 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

(a) Aurkitu A eta B parametroen balioak f zuzen erreal osoan deribagarria izan dadin.

(b) Egin f-ren adierazpen grafikoa (a) atalean lortutako A eta B parametroen balioekin.

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Kalkulatu $\displaystyle\int \ln(x^2 - 1)\, dx$.

B4 Ariketa

Marraztu $f(x) = x$, $g(x) = x/8$ eta $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ funtzioen grafikoek lehen koadrantean mugatzen duten eremua eta kalkulatu eremu horren azalera.

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

S ontziak, 5 bola zuri eta 3 beltz ditu. Beste T ontziak 6 zuri eta 4 beltz. Ausaz ontzi bat aukeratu eta bi bola aterako ditugu.

(a) Zein da ateratako bi bolak beltzak izateko probabilitatea?

(b) Ateratako bi bolak beltzak izanik, zein da aukeratutako ontzia T izateko probabilitatea?

B5 Ariketa

Ikerketa baten arabera, auzo jakin batean etxeen % 60k gutxienez bi auto dituzte. Auzo horretan 50 etxeren lagin bat aukeratzen da ausaz. Eskatzen da:

(a) Zein da etxe horietako 20k gutxienez bi auto izateko probabilitatea?

(b) Zein da 30 eta 40 arteko etxek gutxienez, biak barne, bi auto izateko probabilitatea?

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 2z = 2, \\ 2x + 2y - 2z = \alpha, \\ \alpha x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

Resuelve el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Ejercicio B1

Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

sabiendo que

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + \alpha y + z = 1. \\ 2x + 6y - 2z = 6. \end{cases}$$

¿Existe algún valor de α para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

Ejercicio B2

Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Ejercicio B3

Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax, & \text{si } x \leq 1, \\ Bx - A, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(a) Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real.

(b) Haz la representación gráfica de la función f con los valores de A y B obtenidos en el apartado (a).

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int \ln(x^2 - 1)\, dx$.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x/8$ y $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

(b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

Ejercicio B5

Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos coches?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta $2,5$ puntuen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A1.

- Matrizearen determinantea kalkulatzea eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = 2$ kasua eztabaidatzea (0,5 puntu).
- $\alpha = 1$ kasua ebaztea (1 puntu).

B1.

- Determinantea zuzen kalkulatzea (1 puntu).
- Erabilitako propietateen azalpena (1,5 puntu).

A2.

- Zuzenaren eta planoaren posizio erlatiboa aztertzea α-ren arabera (1,5 puntu).
- Egindako galderari arrazoituz erantzun (1 puntu).

B2.

- Zuzenaren ekuazio parametrikoak zuzen kalkulatzea (1,5 puntu).
- Egindako galderari zuzen erantzutea, arrazoituz (1 puntu).

A3.

- Funtzioaren deribatua kalkulatzea (0,5 puntu).
- Zuzen ukitzaileak $x = 1$ eta $x = -1$ abszisa duten puntuetan kalkulatzea (1 puntu).
- Gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak lortzea (1 puntu).

B3.

- (a) atala zuzen ebaztea (2 puntu).
- f funtzioaren adierazpen grafikoa (0,5 puntu).

A4.

- Zatikako integrazioaren formula zuzen aplikatzea (1 puntu).
- Lortutako integral arrazionalaren kalkulu zuzena (1,5 puntu).

B4.

- Eremua ondo marraztea, eta grafikoen ebaki-puntuak kalkulatzea. (1,25 puntu).
- Eremuaren azalera kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).

A5.

- Ariketaren planteamendu zuzena (0,5 puntu).
- (a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

B5.

- Probabilitate-banaketa identifikatzea (0,5 puntu).
- (a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta $2,5$ puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.
7. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

A1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos en los que no se anula el determinante (1 punto).
- Discusión para el caso de $\alpha = 2$ (0,5 puntos).
- Resolución para el caso $\alpha = 1$ (1 punto).

B1.

- Cálculo correcto del determinante (1 punto).
- Explicación de la propiedades aplicadas (1,5 puntos).

A2.

- Estudiar la posición de la recta y el plano en función de α (1,5 puntos).
- Responder razonadamente a la pregunta formulada (1 punto).

B2.

- Cálculo correcto de las ecuaciones paramétricas de la recta (1,5 puntos).
- Responder razonadamente a la pregunta formulada (1 punto).

A3.

- Cálculo de la derivada de la función (0,5 puntos).
- Cálculo de las rectas tangentes en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$ (1 punto).
- Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (1 punto).

B3.

- Resolución correcta del apartado (a) (2 puntos).
- Representación gráfica de la función f (0,5 puntos).

A4.

- Aplicación correcta de la fórmula de integración por partes (1 punto).
- Cálculo correcto de la integral racional obtenida (1,5 puntos).

B4.

- Dibujo adecuado del recinto y cálculo de los puntos de corte de las gráficas (1,25 puntos).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1,25 puntos).

A5.

- Planteamiento correcto del ejercicio (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado (a) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado (b) (1 punto).

B5.

- Identificar el modelo de probabilidad (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado (a) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado (b) (1 punto).

ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Koefizienteen matrizearen determinantea $2\alpha - 4$ da. Orduan, $\alpha \neq 2$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$\alpha = 2$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta baita ere matrize zabalduarena; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da.

$\alpha = 1$ denean, sistemaren soluzioa $x = -1$, $y = 1/2$, $z = -1$ da.

B1 EBAZPENA

Izan bedi $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$. Errenkada bati beste errenkada baten multiplo bat batzeak ez du aldatzen determinantearen balioa; beraz,

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ p+x & q+y & r+x \\ x & y & z \end{vmatrix} = d.$$

Bi errenkada elkar trukatzeak determinantearen zeinua aldatzen du; beraz,

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+x \end{vmatrix} = -d.$$

Errenkada baten elementu guztiak konstante batekin biderkatzen badira, determinantea ere konstante horrekin biderkatuta geratzen da; beraz,

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+x \end{vmatrix} = -2d.$$

Ondorioz, $d = -3$.

A2 EBAZPENA

Zuzenaren norabide bektorea $(3,\alpha,1)\times(1,3,-1)=(-\alpha-3,4,9-\alpha)$ da, eta $R(1,0,-2)$ zuzenaren puntu bat. Planoak zuzena barnean edukitzeko, planoaren bektore normalak eta zuzenaren norabide bektoreak perpendikularrak izan behar dute; beraz, haien biderkadura eskalarrak zero izan behar du: $(-\alpha-3,4,9-\alpha)\cdot(1,1,1)=0$, eta hemendik $\alpha=5$ denean gerta daiteke planoak zuzena barnean edukitzea edo planoa eta zuzena paraleloak izatea, baina $\alpha\neq 5$ denean planoak eta zuzenak elkar ebakitzen dute.

Ondoren planoak zuzena barnean duen erabakitzeko, zuzenaren $R(1,0,-2)$ puntuak planoan egon behar du; horretarako R puntua planoaren ekuazioan, $x+y+z-1=0$, ordezkatzen dugu, eta hemendik $1-2-1\neq 0$ ateratzen da, beraz ez da existitzen α-ren baliorik planoak zuzena har dezan.

Ariketa ebazteko beste modu bat honako hau da: π planoak r zuzena barnean eduki dezan zuzena definitzeko ditugun bi planoen ekuazioek eta π planoaren ekuazioak osatzen duten sistemak bateragarri indeterminatua izan behar du, baina koefizienteen matrizearen heina 2 da eta matrize hedatuarena, 3. Beraz, sistema bateraezina da eta horrek esan nahi du zuzenaren punturik ez dagoela planoan.

B2 EBAZPENA

Lehenengo zuzenaren norabide bektorea lortuko dugu:

$$(3,1,1)\times(1,-1,2)=(3,-5,-4).$$

Ondoren, zuzenaren puntu bat, $P(0,0,0)$. Datu hauekin, eskatutako zuzenaren ekuazio parametrikoak lortuko ditugu:

$$\begin{cases} x=3t,\\ y=-5t,\\ z=-4t. \end{cases}$$

Azkenik, $(-3,s,s)$ puntua zuzenaren ekuazioetan ordezkatuz, lehen ekuaziotik $t=-1$ ateratzen dugu. t-ren balio horretarako beste bi ekuazioetatik s parametroaren bi balio lortzen ditugu, hau da, -5 eta -4; beraz, ez da existitzen s parametroaren baliorik zeinean $(-3,s,s)$ puntua r zuzenean baitago.

Ariketa ebazteko beste modu bat honako hau da: $(-3, s, s)$ puntua zuzenaren ekuazio inplizituetan ordezkatuz, lehen ekuaziotik $s = 9/2$ ateratzen dugu, eta bigarrenetik $s = 3$; beraz, ez da existitzen s zeinean $(-3, s, s)$ puntua r zuzenean baitago.

A3 EBAZPENA

f-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $y = 3x-2$ zuzenarekiko paraleloak izan daitezen, f-ren deribatuak 3 izan behar du.

$f'(x) = 6x^2 - 3$ denez, bete behar da $x = 1$ edo $x = -1$ izatea. $x = 1$ puntuko zuzen ukitzailea $y = 3x - 3$ eta $x = -1$ puntuko zuzen ukitzailea $y = 3x + 5$ dira.

f gorakorra da $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ eta $(1/\sqrt{2}, \infty)$ tarteetan.

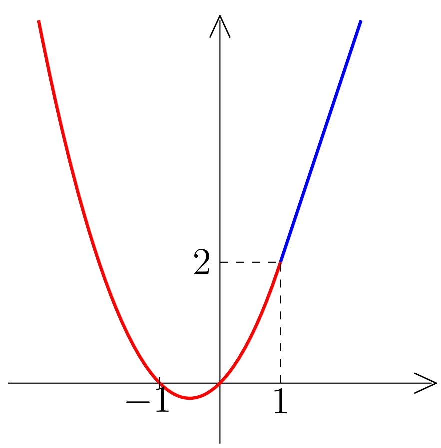
f beherakorra da $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ tartean.

B3 EBAZPENA

(a) f funtzioa $x = 1$ puntuan jarraitua izan dadin $2A - B = 1$ bete behar da. Gainera, f funtzioa $x = 1$ puntuan deribagarria izan dadin, $2 + A = B$ bete behar da. Beraz, f deribagarria da zuzen erreal osoan baldin eta soilik baldin $A = 1$ eta $B = 3$ badira.

(b) Aurreko atalean lortutako A eta B parametroen balioekin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 1 \text{ bada,} \\ 3x - 1, & x > 1 \text{ bada.} \end{cases}$$



A4 EBAZPENA

Zatikako integrazioaren metodoa aplikatu behar da, $u = \ln(x^2-1)$ eta $dv = dx$ izanik. Orduan,

$$\int \ln(x^2-1)\,dx = x\ln(x^2-1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx.$$

Azken integralean agertzen den funtzio arrazionala frakzio sinpleetan deskonposatuz,

$$\frac{2x^2}{x^2-1} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

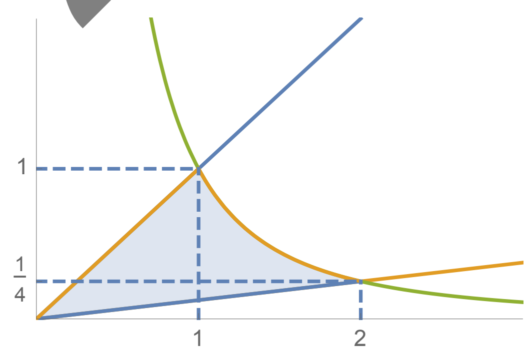
Beraz,

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2-1)\,dx &= x\ln(x^2-1) - 2x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + K\\ &= x\ln(x^2-1) - 2x + \ln\Big|\frac{x+1}{x-1}\Big| + K.\end{aligned}$$

B4 EBAZPENA

f eta h funtzioen grafikoek $x=1$ abszisa duen puntuan elkar ebakitzen dute. g eta h funtzioen grafikoek $x=2$ abszisa duen puntuan elkar ebakitzen dute.

f, g eta h funtzioen grafikoek mugatzen duten eremua honako hau da:



Eremu horren azalera honela kalkulatzen da:

$$A = \int_0^1 \Big(x - \frac{x}{8}\Big)\,dx + \int_1^2 \Big(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\Big)\,dx = \frac{3}{4}.$$

A5 EBAZPENA

(a) $P(\text{bi bola beltz}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{101}{840}.$

(b) $P(T\ \text{ontzia}|\text{bi bola beltz}) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{101}{840}}=\frac{56}{101}.$

B5 EBAZPENA

Banaketa binomiala da $B(50,0,6)$. $n\cdot p\geq 5$ eta $n\cdot q\geq 5$ direnez, $N(30,3,46)$ banaketa normalarekin hurbil daiteke.

(a) $P(X\geq 20)=P(Y>19,5)=P(Z>-3,03)=P(Z<3,03)=0,9988.$

(b) $P(30\leq X\leq 40)=P(29,5<Y<40,5)=P(-0,14<Z<3,03)=0,9988-1+0,5557=0,5545.$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $2\alpha - 4$. Entonces, si $\alpha \neq 2$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si $\alpha = 2$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y también el de la matriz ampliada, por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Si $\alpha = 1$, la solución del sistema es $x = -1$, $y = 1/2$, $z = -1$.

SOLUCIÓN B1

Sea $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$. Si a una fila se le suma un múltiplo de otra fila, el valor del determinante no cambia, por tanto,

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ p+x & q+y & r+x \\ x & y & z \end{vmatrix} = d.$$

Si se intercambian dos filas, cambia el signo del determinante, por tanto,

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+x \end{vmatrix} = -d.$$

Si se multiplican todos los elementos de una fila por una misma constante, el determinante también queda multiplicado por esa constante, por tanto,

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+x \end{vmatrix} = -2d.$$

En consecuencia, $d = -3$.

SOLUCIÓN A2

El vector director de la recta es $(3, \alpha, 1) \times (1, 3, -1) = (-\alpha - 3, 4, 9 - \alpha)$, y $R(1, 0, -2)$ es un punto de la recta. Para que el plano contenga a la recta, el vector normal al plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares; por tanto, su producto escalar debe ser cero: $(-\alpha - 3, 4, 9 - \alpha) \cdot (1, 1, 1) = 0$, y de aquí, si $\alpha = 5$ puede ocurrir que el plano contenga a la recta o que el plano y la recta sean paralelos, pero si $\alpha \neq 5$ el plano y la recta se cortan.

A continuación, el punto $R(1, 0, -2)$ de la recta tiene que estar en el plano, para ello se sustituye el punto R en la ecuación del plano, $x + y + z - 1 = 0$, y de ahí se obtiene $1 - 2 - 1 \neq 0$, por tanto, no existe ningún valor de α de forma que el plano contenga a la recta.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: para que el plano π contenga a la recta r el sistema formado por las dos ecuaciones que definen la recta y la ecuación del plano debe ser compatible indeterminado, pero el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3. Por tanto, el sistema es incompatible y eso quiere decir que ningún punto de la recta está en el plano.

SOLUCIÓN B2

Primero calculamos el vector director de la recta:

$$(3, 1, 1) \times (1, -1, 2) = (3, -5, -4).$$

A continuación, un punto de la misma, $P(0, 0, 0)$. Con estos datos obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta, que son:

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = -5t, \\ z = -4t. \end{cases}$$

Finalmente, sustituimos el punto $(-3, s, s)$ en las ecuaciones de la recta r, y de la primera ecuación obtenemos $t = -1$. Para ese valor de t de las otras dos ecuaciones obtenemos dos valores de s, -5 y -4, luego no existe ningún valor de s para que el cual el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta r.

Otra forma de resolver el ejercicio es la siguiente: sustituyendo el punto $(-3, s, s)$

en las ecuaciones implícitas de la recta, de la primera ecuación se obtiene $s = 9/2$ y de la segunda ecuación, $s = 3$; por tanto, no existe ningún valor de s para que el cual el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta r.

SOLUCIÓN A3

Para que las rectas tangentes a la gráfica de f sean paralelas a la recta $y = 3x - 2$, la derivada de f tiene que ser 3.

Como $f'(x) = 6x^2 - 3$, tiene que ser $x = 1$ ó $x = -1$. La recta tangente en el punto $x = 1$ es $y = 3x - 3$ y la recta tangente en el punto $x = -1$ es $y = 3x + 5$.

f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$.

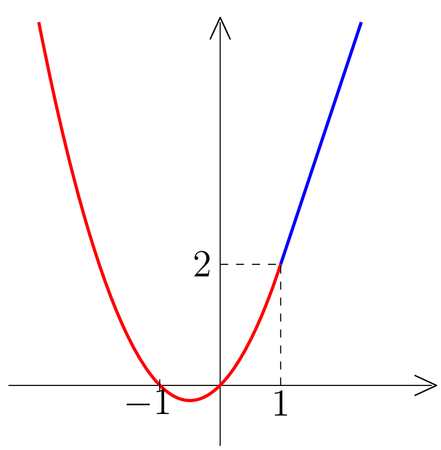
f es decreciente en el intervalo $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

SOLUCIÓN B3

(a) Para que la función f sea continua en el punto $x = 1$ se debe cumplir que $2A - B = 1$. Además, para que la función f sea derivable en el punto $x = 1$ tiene que ser $2 + A = B$. Por tanto, f es derivable en toda la recta real si y solo si $A = 1$ y $B = 3$.

(b) Con los valores de los parámetros A y B del apartado anterior

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x \leq 1, \\ 3x - 1, & \text{si } , x > 1. \end{cases}$$



SOLUCIÓN A4

Hay que utilizar el método de integración por partes, tomando $u = \ln(x^2-1)$ y $dv = dx$. Entonces,

$$\int \ln(x^2-1)\,dx = x\ln(x^2-1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx.$$

Descomponiendo en fracciones simples la función racional que aparece en la última integral,

$$\frac{2x^2}{x^2-1} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

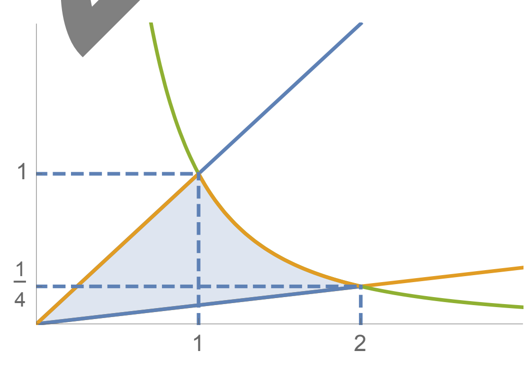
Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2-1)\,dx =& x\ln(x^2-1) - 2x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + K\\ =& x\ln(x^2-1) - 2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + K.\end{aligned}$$

SOLUCIÓN B4

Las gráficas de las funciones f y h se cortan en el punto de abscisa $x = 1$. Las gráficas de las funciones g y h se cortan en el punto de abscisa $x = 2$.

La región limitada por las gráficas de f, g y h es el siguiente:



El área de ese recinto se calcula así:

$$A = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{8}\right)dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right)dx = \frac{3}{4}.$$

SOLUCIÓN A5

(a) $P(\text{dos bolas negras}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{101}{840}$.

(b) $P(\text{urna } T \,|\, \text{dos bolas negras}) = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{101}{840}} = \frac{56}{101}$.

SOLUCIÓN B5

Se trata de una distribución binomial, $B(50, 0, 6)$. Como $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5$, se puede aproximar mediante una distribución normal $N(30, 3, 46)$.

(a) $P(X \geq 20) = P(Y > 19, 5) = P(Z > -3, 03) = P(Z < 3, 03) = 0, 9988$.

(b) $P(30 \leq X \leq 40) = P(29, 5 < Y < 40, 5) = P(-0, 14 < Z < 3, 03) = 0, 9988 - 1 + 0, 5557 = 0, 5545$.