

eman ta zabal zazu

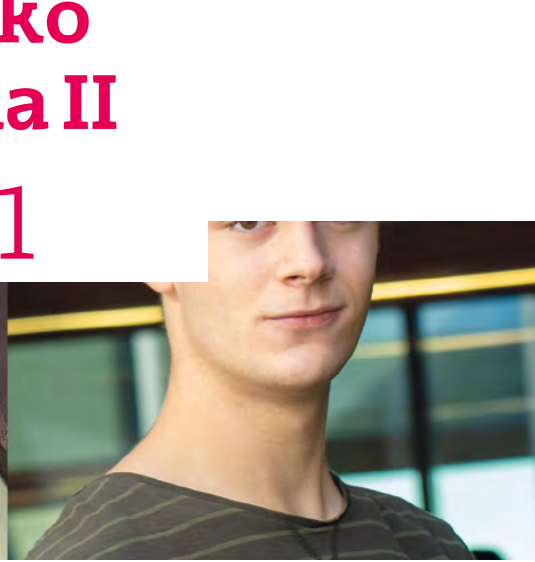


Universidad
del País Vasco Euskal Herriko
Unibertsitatea



Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II USE 2021

www.ehu.eus





Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2021eko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II

- **Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta.**
Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.
- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

- **Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques.**
De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.
- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. *gehienez 2,5 puntu*

Izan bedi matrize hau: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- 0,75 puntu* Zehaztu itzazu m eta n parametroen balioak A matrizea bere irauliarekin bat etor dadin, eta alderantzikorik izan ez dezan.
- 0,75 puntu* $m = 0$ eta $n = 3$ denean, kalkula ezazu, ahal bada, alderantzizko matrizea.
- 1 puntu* $m = 0$ eta $n = 3$ denean, ebatzi ekuazio matrizial hau:

$$X \cdot A + 2I_3 = A^2$$

B.1. *gehienez 2,5 puntu*

Enpresa batek perla zuriak, grisak eta arrosak dituzten bi alkandora mota ekoizten ditu. A motako alkandora bat egiteko 20 perla zuri, 20 gris eta 30 arrosa behar dira; B motako alkandora bat egiteko, berriz, 10 perla zuri, 20 gris eta 60 arrosa.

Enpresak gehienez 900 perla zuri eta 1400 gris ditu, eta gutxienez 1800 perla arrosa erabiltzea erabaki du.

Jakina da A motako alkandora bakoitzeko 60 euroko irabazia lortzen dela, eta B motako alkandora bakoitzeko 50 eurokoa.

- 2 puntu* Kalkula ezazu alkandora mota bakoitzeko zenbat ale ekoiztu behar dituen etekin maximoa lortzeko, bai eta aipatutako irabazi horren balioa ere.
- 0,5 puntu* Posible al da enpresak A motako 40 alkandora eta B motako 20 alkandora ekoiztea? Arrazoitu ezazu erantzuna.

BLOKEA: ANALISIA

A.2. [2,5 puntu]

Izan bedi $f(x)$ funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{baldin eta } x < 1 \text{ bada} \\ ax + \frac{2}{x} & \text{baldin eta } x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$$

- a) [0,5 puntu] Aurkitu ezazu a parametroaren balioa $f(x)$ funtzioa $x = 1$ puntuan jarraitua izateko.
- b) [0,4 puntu] $a = \frac{1}{2}$ kasuan, zehaztu ezazu funtzioak $x = 2$ abszisa-puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.
- c) [1 puntu] $a = 2$ kasuan, egin ezazu funtzioaren adierazpen grafikoa; horretarako, aztertu funtzioaren maximo eta minimo erlatiboak eta inflexio-puntuak $x < 1$ denean.
- d) [0,6 puntu] Kalkula ezazu:

$$\int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx$$

B.2. [gehienez 2,5 puntu]

Izan bedi funtzio hau: $f(x) = ax^3 + bx + 11$

- a) [1 puntu] Kalkula itzazu a eta b parametroen balioak $f(x)$ funtzioak mutur erlatibo bat izan dezan $(2, 5)$ puntuan.
- b) [0,75 puntu] $a = \frac{3}{8}$ eta $b = \frac{-9}{2}$ kasuan, aztertu funtzioaren mutur erlatiboak eta inflexio-puntuak.
- c) [0,75 puntu] $a = \frac{3}{8}$ eta $b = \frac{-9}{2}$ kasuan, adieraz itzazu grafikoki eta kalkulatu funtzioak, OX abzisa-ardatzak eta $x = -2$ eta $x = 2$ zuzenek mugatutako eskualdearen azalera.

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Koloretako bolak dituzten bi kutxak, A eta B, honako osaera hau dute:

A: 5 zuri, 3 beltz eta 2 gorri

B: 4 zuri eta 6 beltz

Bestalde, 4 aurpegi A letrarekin eta beste bi aurpegiak B letrarekin markatuak dituen dado bat daukagu. Dadoa bota, eta, zoriz, bola bat aterako dugu dadoak adierazten duen kutxatik.

- [[1 puntu]]* Zein da ateratako bola hori zuria izateko probabilitatea?
- [[0,5 puntu]]* Zein da ateratako bola hori gorria izateko probabilitatea?
- [[1 puntu]]* Ateratako bola zuria izan da. Zer probabilitate dago bola hori B kutxakoa izateko?

B.3. *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Izan bitez A, B, C, D, E , eta F zorizko esperimentu jakin baten gertaerak.

- [[0,75 puntu]]* Badakigu $P(A) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,7$ eta $P(A \cap B) = 0,4$ direla. Kalkula ezazu B gertatzeko probabilitatea.
- [[1 puntu]]* Badakigu $P(C) = 0,4$; $P(D) = 0,3$ eta $P(C \cup D) = 0,5$ direla. Kalkula ezazu C gertatzeko probabilitatea, jakinda D ez dela gertatu.
- [[0,75 puntu]]* Badakigu $P(E) = 0,6$; $P(F) = 0,8$ eta E eta F gertaerak askeak direla. Kalkula ezazu gertaera bietako bat ere ez gertatzeko probabilitatea.

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. *[gehienez 2,5 puntu]*

Enpatia-test batean, aztertutako populazioaren % 40k 4 puntu baino gutxiagoko emaitza lortu zuen. Badakigu testaren emaitzak 4,8 puntuko batezbestekoa duen banaketa normal bati jarraitzen diola.

- [0,75 puntu]* Kalkula ezazu banaketaren desbideratze tipikoa.
- [0,75 puntu]* Desbideratze tipikoa 3,14 puntu baldin bada, zer puntuazio gainditzen du populazioaren % 35ek soilik?
- [1 puntu]* Desbideratze tipikoa 3,14 puntu baldin bada, populazioaren zer ehunekok du batezbestekotik 2 puntu baino gutxiagora dagoen emaitza bat?

B.4. *[gehienez 2,5 puntu]*

Hiri jakin bateko gazteek asteburu batean egiten duten gastua aldagai aleatorio bat da, eta μ batezbesteko ezezaguna eta 6 euroko desbideratze tipikoa dituen banaketa normal bati jarraitzen dio.

- [1,5 puntu]* Zorizko lagin simple bat aukeratu da, eta ikusi da batezbestekorako konfiantza-tartea $(24,47, 26,43)$ dela % 95eko konfiantza-mailaz. Kalkulatu laginaren batezbestekoaren balioa, eta hautatutako laginaren tamaina.
- [1 puntu]* Tamaina 49 duen beste lagin bat aukeratu da μ zenbatesteko. Kalkula ezazu zenbatespen horretarako egindako errore maximo onargarria % 97ko konfiantza-mailaz.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II. (2021eko OHIKOA)

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi ariketaz osatuta dago.
2. **Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.**
3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.
6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, ...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek beharke lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa $2,5$ dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **0,75 puntu.** m eta n parametroen balioen kalkulua.
- Problemaren planteamendua, **0,15 puntu.**
 - $A = A^t$ berdintzatik m parametroaren balioa ateratzea, **0,2 puntu.**
 - $\nexists A^{-1} \Rightarrow |A| = 0$ dedukzioa adieraztea, **0,2 puntu.**
 - n parametroaren balioa ateratzea, **0,2 puntu**
- b. **0,75 puntu.** A matrizearen alderantzizkoaren kalkulua.
- A matrizearen determinantearen kalkulua, **0,25 puntu.**
 - $Adj A$ matrizea zehaztea, **0,25 puntu.**
 - A^{-1} matrizea kalkulatzeko, **0,25 puntu.**
- c. **1 puntu.** Ekuazio matritziala ebaztea.
- X matrizea zehaztea, **0,3 puntu.**
 - A^2 matrizea kalkulatzeko, **0,25 puntu.**
 - $A^2 - 2I_3$ matrizea kalkulatzeko, **0,2 puntu.**
 - X matrizearen kalkulua, **0,25 puntu.**

B.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **2 puntu**
- Helburu-funtzioa zehaztea, **0,1 puntu.**
 - Murrizketak determinatzea, **0,2 puntu.**
 - Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea eta zehaztea, **1 puntu.**
 - Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea, **0,4 puntu.**
 - Funtzioa erpinetan baloratzea, **0,2 puntu.**
 - Maximoa zehaztea, eta funtzioaren balioa puntu horretan baloratzea, **0,1 puntu.**
- b. **0,5 puntu.**
- Erantzun arrazoitua, **0,5 puntu.**



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: ANALISIA

A.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **0,5 puntu.** a parametroaren balioa funtzioa $x = 1$ puntuan jarraitua izan dadin.
- Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,15 puntu.**
 - Alboko limiteen kalkulua, **0,25 puntu.**
 - a parametroaren balioa zehaztea, **0,1 puntu.**
- b. **0,4 puntu.** Funtzioaren zuzen ukitzalea $x = 2$ puntuan.
- Zuzen ukitzalearen malda zehaztea, **0,2 puntu.**
 - Zuzen ukitzalearen ekuazioa zehaztea, **0,2 puntu.**
- c. **1 puntu.**
- Funtzioaren muturren kalkulua, **0,2 puntu.**
 - Maximo eta minimo erlatiboak zehaztea, **0,2 puntu.**
 - Inflexio-puntuak zehaztea, **0,2 puntu.**
 - Adierazpen grafikoa.
 - Hirugarren mailako polinomioaren irudikapena, **0,2 puntu.**
 - Funtzio arrazionalaren irudikapena, **0,2 puntu.**
- d. **0,6 puntu.** Integral mugagabearen kalkulua.
- $\int x^3 dx$ integrala kalkulatzeko, **0,1 puntu.**
 - $\int 3x^2 dx$ integrala kalkulatzeko, **0,1 puntu.**
 - $\int \frac{2}{x} dx$ integrala kalkulatzeko, **0,2 puntu.**
 - $\int \frac{4}{x^2} dx$ integrala kalkulatzeko, **0,2 puntu.**

B.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **1 puntu.** a eta b parametroen balioak zehaztea.
- Lehenengo deribatuaren kalkulua, **0,2 puntu.**
 - $(2, 5)$ funtzioaren puntu bat da, **0,25 puntu.**
 - $(2, 5)$ puntuan funtzioak mutur erlatibo bat dauka, **0,25 puntu.**
 - Sortzen den sistema ebatzea, **0,3 puntu.**



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

b. 0,75 puntu.

- Funtzioaren muturren kalkulua, **0,3 puntu.**
- Funtzioaren minimo eta maximo erlatiboak zehaztea, **0,2 puntu.**
- Inflexio-puntuak zehaztea.
 - Bigarren deribatua, **0,1 puntu.**
 - Inflexio-puntuak zehaztea, **0,15 puntu.**

c. 0,75 puntu. Funtzioek eta OX abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera.

- Adierazpen grafikoa, **0,25 puntu.**
- Integral mugatuaren kalkulua.
 - Integral mugagabearen kalkulua, **0,2 puntu.**
 - Barrow aplikatzea, **0,2 puntu.**
 - Azalera zehaztea, **0,1 puntu.**

2021



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Zuhaitz-diagrama bat edo eskemaren bat egitea, **0,5 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu**.

b. 0,5 puntu.

- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu**.

c. 1 puntu.

- A posteriori probabilitatea, Bayes-en teorema, adieraztea, **0,5 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu**.

B.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,75 puntu.

- Venn-en diagrama bat edo eskemaren bat egitea, **0,25 puntu**.
- $P(A \cup B)$ formula adieraztea, **0,25 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu**.

b. 1 puntu.

- Zuhaitz diagrama bat edo eskemaren bat egitea, **0,2 puntu**.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,15 puntu**.
- $P(C / D^c)$ formula adieraztea, **0,25 puntu**.
- $P(C \cap D)$ formula adieraztea, **0,25 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,15 puntu**.

c. 0,75 puntu.

- Adieraztea zer esan nahi duen gertaera askeak izateak, **0,2 puntu**.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,15 puntu**
- E^c eta F^c ere askeak dira, edo $P(E^c \cap F^c)$ formula adieraztea edo kontingentzia-taula bat egitea, **0,25 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,15 puntu**.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,75 puntu.

- Problemaren planteamendua, **0,2 puntu.**
- Aldagaiaren tipifikazioa, **0,2 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,2 puntu.**
- Ekuazioa ebaztea σ lortuta, **0,15 puntu.**

b. 0,75 puntu.

- Problemaren planteamendua, **0,2 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako k balioa zehaztea, **0,25 puntu.**

c. 1 puntu.

- Problemaren planteamendua, **0,2 puntu.**
- $P(X \leq 6,8)$ kalkulatzea, **0,3 puntu.**
- $P(X \leq 2,8)$ kalkulatzea, **0,4 puntu.**
- Eskatutako ehunekoa, **0,1 puntu.**

B.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,5 puntu.

- Laginaren batezbestekoa zer den adieraztea, **0,2 puntu.**
- Laginaren batezbestekoa zehaztea, **0,5 puntu.**
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ determinatzea, **0,3 puntu.**
- Errorearen zer den adieraztea, **0,2 puntu.**
- Errorearen formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Laginaren tamainaren kalkulua, **0,1 puntu.**

b. 1 puntu.

- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ determinatzea, **0,4 puntu**
- Errorearen formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Errorearen kalkulua, **0,4 puntu.**



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPENAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. Kalkulu matriziala. Alderantzizko matrizearen kalkulua. Ekuazio matriziala.

Izan bedi matrize hau: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Kalkulatu m eta n non $A = A^t$ eta $\nexists A^{-1}$.

$$\color{red}{+} A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow m = -1$$

$$\color{red}{+} \nexists A^{-1} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5$$

b) $m = 0$ eta $n = 3$ balioetarako, zehaztu A^{-1}

$$\color{red}{+} |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\color{red}{+} A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $m = 0$ eta $n = 3$ balioetarako, ebatzi ekuazio matriziala: $X \cdot A + 2 I_3 = A^2$

$$X \cdot A + 2 I_3 = A^2 \Rightarrow X \cdot A = A^2 - 2 I_3 \Rightarrow X = (A^2 - 2 I_3) \cdot A^{-1}$$

$$\color{red}{+} A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\color{red}{+} A^2 - 2 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\color{red}{+} X = (A^2 - 2 I_3) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.1 Bi aldagaiko programazio linealeko problemaren ebazpena:

	Perla zuriak	Perla grisak	Perla arrosak	Irabazia	KANTITATEA
A	20	20	30	60 €	x
B	10	20	60	50 €	y

a)

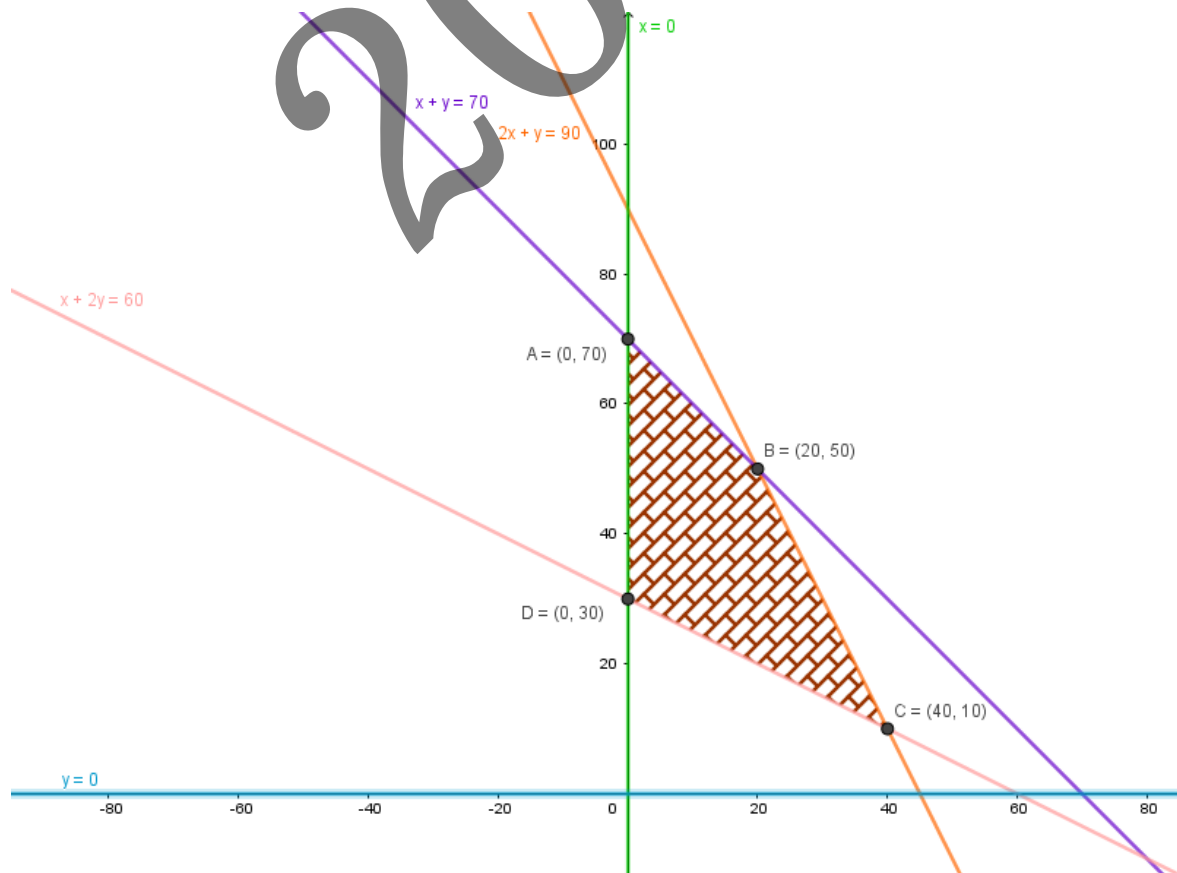
✚ Helburu-funtzioa hau da:

$$f(x, y) = 60x + 50y$$

✚ Murrizketak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 10y \leq 900 \\ 20x + 20y \leq 1400 \\ 30x + 60y \geq 1800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 90 \\ x + y \leq 70 \\ x + 2y \geq 60 \end{cases}$$

✚ Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:





CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

✚ Beraz, erpinak hauek dira:

$$A(0,70), \quad B(20,50), \quad C(40,10), \quad D(0,30)$$

$$\text{✚ } f(A) = f(0,70) = 3500$$

$$f(B) = f(20,50) = 3700$$

$$f(C) = f(40,10) = 2900$$

$$f(D) = f(0,30) = 1500$$

✚ Funtzioaren balio maximoa **$B(20, 50)$** puntuan lortzen da; ondorioz, A motako 20 alkandora eta B motako 50 fabrikatu behar dira; hala, etekin maximoa lortuko da: **3700 €**

✚ Ezin daitezke A motako 40 alkandora eta B motako 20 alkandara egin, $(40, 20)$ puntua ez baitago soluzio bideragarrien esparruan, ez ditu-eta murrizketa guztiak betetzen.

$$2x + y \leq 90 \Rightarrow 2 \cdot 40 + 20 = 100 \leq 90 \Rightarrow \text{Faltsua}$$

$$x + y \leq 70 \Rightarrow 40 + 20 = 60 \leq 70 \Rightarrow \text{Zuzena}$$

$$x + 2y \geq 60 \Rightarrow 40 + 2 \cdot 20 = 80 \geq 60 \Rightarrow \text{Zuzena}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 40 \geq 0 \Rightarrow \text{Zuzena}$$

$$y \geq 0 \Rightarrow 20 \geq 0 \Rightarrow \text{Zuzena}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: ANALISIA

A.2 Funtzio baten jarraitutasuna. Adierazpena grafikoa. Funtzioaren balioen kalkulua, maximo eta minimo erlatiboak, inflexio-puntuak eta abar... eta abzisa-ardatzarekin eratzten duen eskualdearen azalera kalkulatzeko.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & x < 1 \text{ bada} \\ ax + \frac{2}{x} & x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$$

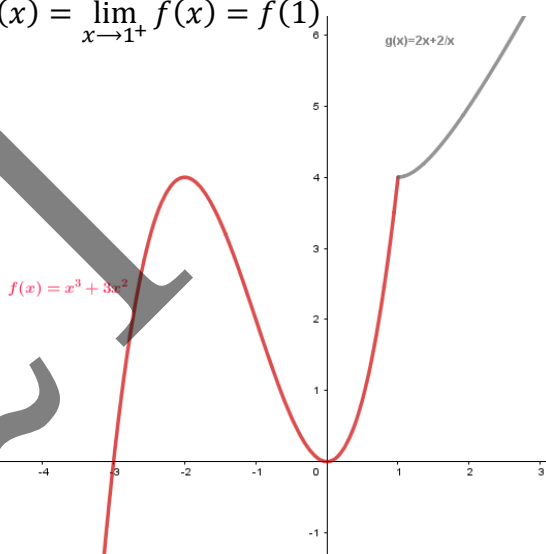
a) a non $f(x)$ jarraitua $x = 1$ puntuan $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 + 3x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + \frac{2}{x} = a + 2$$

$$f(1) = a + 2$$

$$\text{Beraz, } a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$$



b) Zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 2$ abzisa-puntuan.

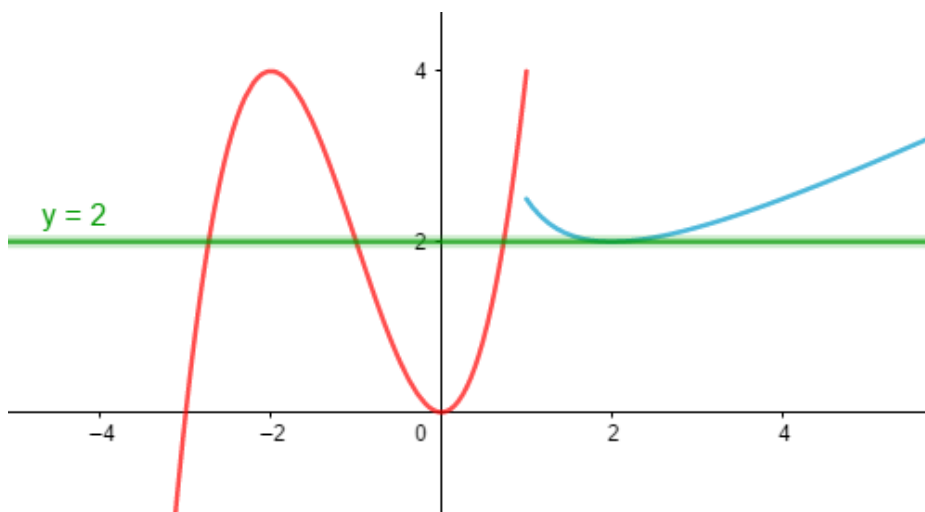
- Zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 2$ puntuan

$$y = f'(2) \cdot x + n$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot x + n = n \Rightarrow y = n$$

$$(2, f(2)) = (2, 2) \text{ zuzen ukitzailean dago} \Rightarrow 2 = n$$

Beraz: $y = 2$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

- c) Funtzioaren maximo eta minimo erlatiboak, inflexio-puntuak eta adierazpen grafikoa, $a = 2$ kasuan.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & x < 1 \text{ bada} \\ 2x + \frac{2}{x} & x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$$

• $x < 1$ bada

✚ Maximo eta minimo erlatiboak $\Rightarrow f'(x) = 0$

▪ $f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = 0 = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x(x + 2) = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ eta $x = -2$

▪ $f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x = 0 & \text{minimoa} \\ f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow x = -2 & \text{maximoa} \end{cases}$

❖ $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ **minimo erlatiboa.**

❖ $f(-2) = 4 \Rightarrow (-2, 4)$ **maximo erlatiboa.**

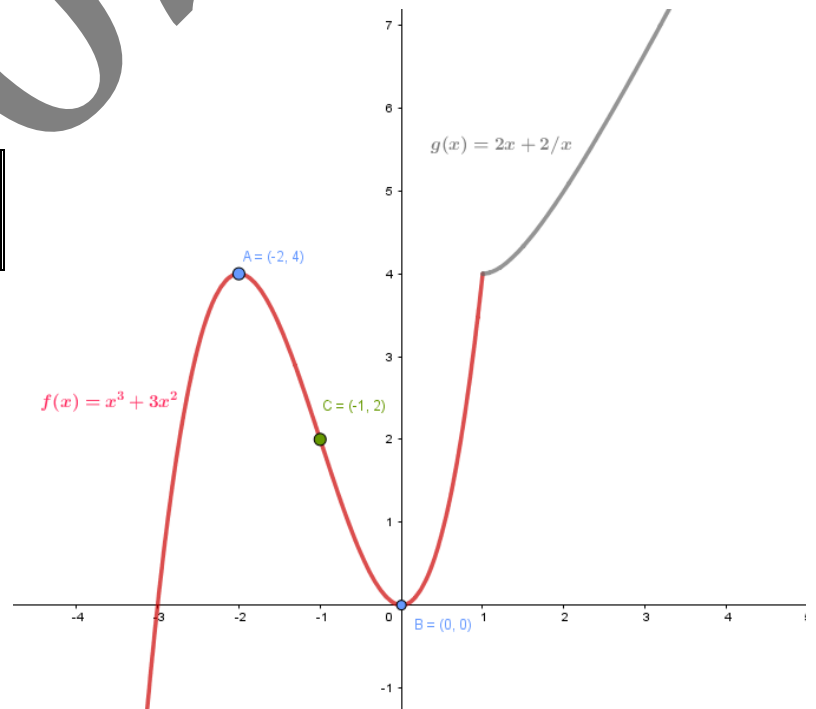
✚ Inflexio-puntuak $\Rightarrow f''(x) = 0$

▪ $f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

❖ $f(-1) = 2 \Rightarrow (-1, 2)$ **inflexio-puntua.**

• $x \geq 1$ bada

x	1	2	4
$f(x)$	4	5	$17/2$



- d)

$$\int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} + 2 \int \frac{1}{x} dx - 4 \int x^{-2} dx = \frac{1}{4} x^4 + x^3 + 2 \ln(x) + 4 \frac{1}{x} + K$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.2 Funtzio baten azterketa. Funtzioaren balioen kalkulua, maximo eta minimo erlatiboak, inflexio-puntuak eta abar...

$$f(x) = ax^3 + bx + 11.$$

a) Kalkulatu a eta b parametroen balioak $f(x)$ funtzioak $(2, 5)$ puntuan mutur bat izan dezan.

$$f(x) \text{ funtzioak mutur bat du } (2, 5) \text{ puntuan} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 5 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

$$\color{blue}{+} \quad f(2) = 5 \Rightarrow 8a + 2b + 11 = 5$$

$$\color{blue}{+} \quad f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + b = 0$$

Beraz, sistema hau dugu: $\begin{cases} 8a + 2b = -6 \\ 12a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{8}$ eta $b = -\frac{9}{2}$.

b) $a = \frac{3}{8}$ eta $b = -\frac{9}{2}$ kasuan, aztertu mutur erlatiboak eta inflexio-puntuak.

$$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11.$$

$$\color{blue}{+} \quad f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow \frac{9x^2 - 36}{8} = 0 \Rightarrow 9x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\color{blue}{+} \quad f''(x) = \frac{9}{4}x$$

$$\checkmark \quad f''(2) = \frac{9}{2} > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ minimoa}$$

$$\checkmark \quad f(2) = 5$$

Orduan, $(2, 5)$ **minimo erlatiboa da.**

$$\checkmark \quad f''(-2) = -\frac{9}{2} < 0 \quad x = -2 \text{ maximoa}$$

$$\checkmark \quad f(-2) = 17$$

Orduan, $(-2, 17)$ **maximo erlatiboa da.**

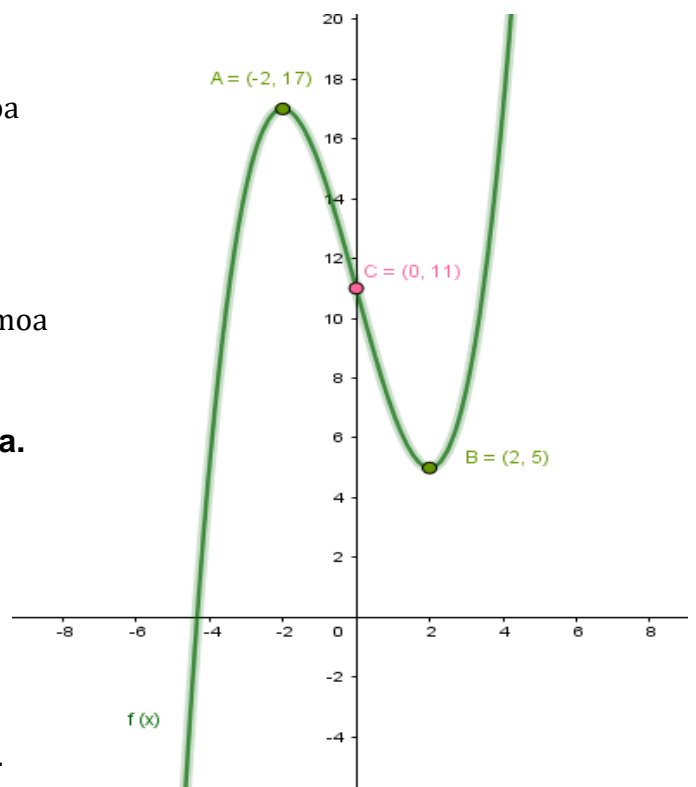
$$\color{blue}{+} \quad f''(x) = \frac{9}{4}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\checkmark \quad f'''(x) = \frac{9}{4} \Rightarrow f'''(0) = \frac{9}{4} \neq 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ inflexio-puntua}$$

$$\checkmark \quad f(0) = 11$$

Orduan, $(0, 11)$ **inflexio-puntu bat da.**

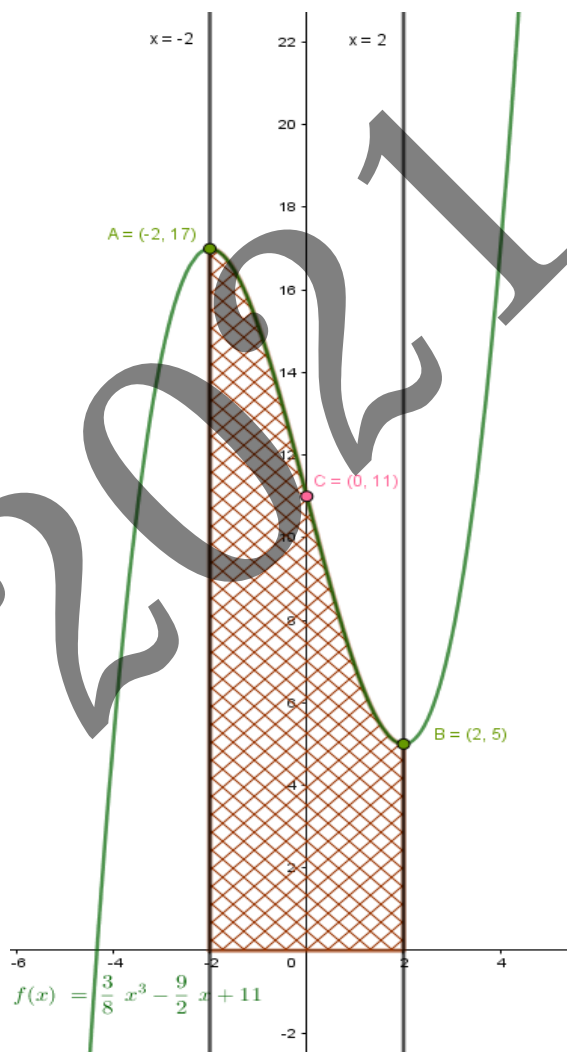


CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

c) Azalera.

$$\int_{-2}^2 \left(\frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11 - 0 \right) dx = \left[\frac{3}{8} \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2} \frac{x^2}{2} + 11x \right]_{-2}^2 = \left[\frac{3}{32}x^4 - \frac{9}{4}x^2 + 11x \right]_{-2}^2 =$$

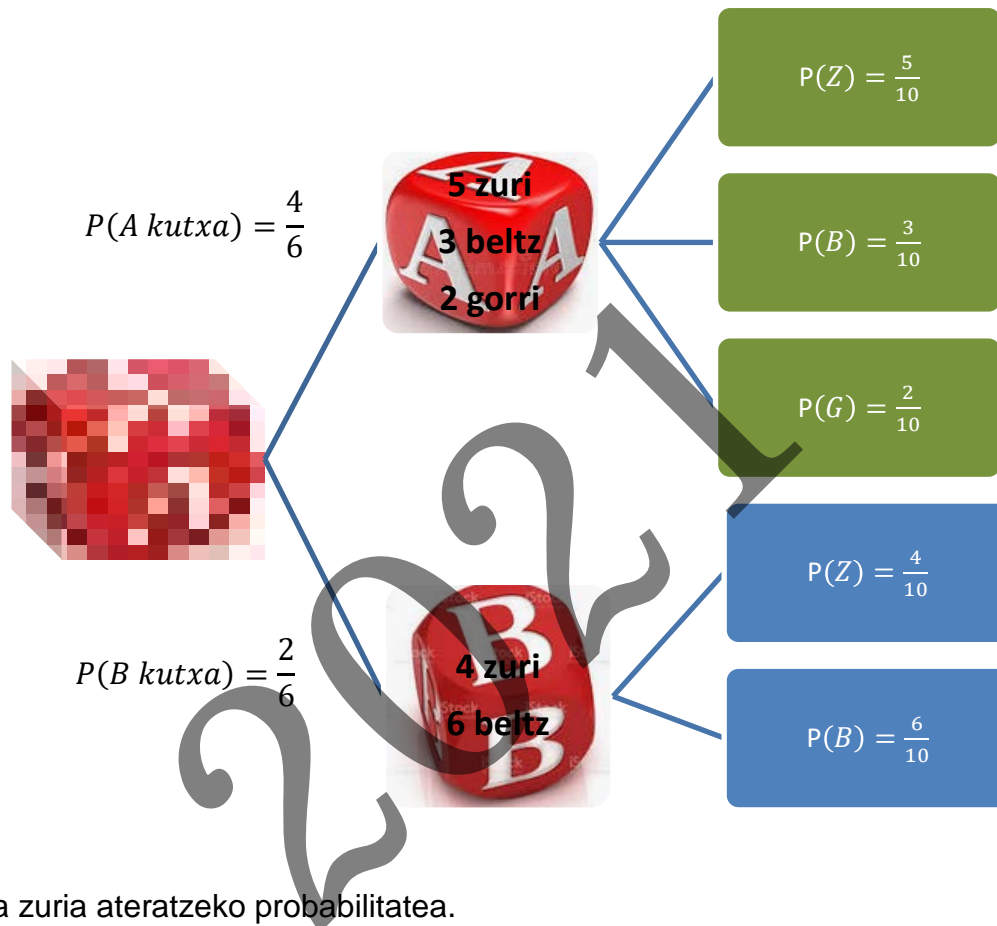
$$= \left(\frac{3}{32} \cdot 16 - \frac{9}{4} \cdot 4 + 11 \cdot 2 \right) - \left(\frac{3}{32} \cdot 16 - \frac{9}{4} \cdot 4 - 11 \cdot 2 \right) = \frac{3}{2} - 9 + 22 - \frac{3}{2} + 9 + 22 = \mathbf{44 \text{ u}^2}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3 Probabilitate-kalkulua, zuhaitz-diagramaren bidez edo probabilitate osoaren bidez.



a) Bola zuria ateratzeko probabilitatea.

$$P(Z) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10} = \frac{7}{15} \Rightarrow P(Z) = 0,4667 \Rightarrow \% 46,67$$

b) Bola gorria ateratzeko probabilitatea.

$$P(G) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{15} \Rightarrow P(G) = 0,1333 \Rightarrow \% 13,33$$

c) Ateratako bola zuria izan da. Zer probabilitate dago bola hori B kutxakoa izateko?

$$P(B \text{ kutxa} | Z) = \frac{P(B \text{ kutxa} \cap Z)}{P(Z)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{2}{7} = 0,2857 \Rightarrow \% 28,57$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

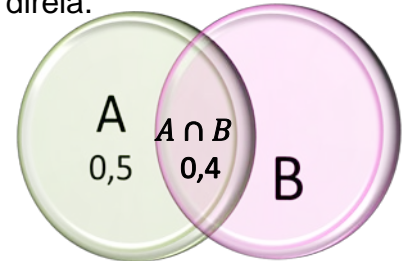
B.3. Probabilitateen kalkuluei buruzko ariketa.

a) Badakigu $P(A) = 0,5$, $P(A \cup B) = 0,7$ eta $P(A \cap B) = 0,4$ direla.

Beraz:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$0,7 = 0,5 + P(B) - 0,4 \Rightarrow P(B) = 0,6$$

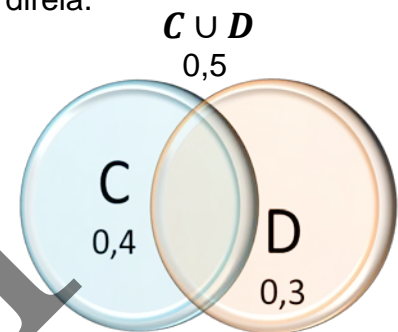


b) Badakigu $P(C) = 0,4$, $P(D) = 0,3$ eta $P(C \cup D) = 0,5$ direla.

$$P(C / D^c) = \frac{P(C \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{P(D^c)} =$$

$$= \frac{P(C) - [P(C) + P(D) - P(C \cup D)]}{P(D^c)} =$$

$$= \frac{-0,3 + 0,5}{1 - 0,3} = \frac{2}{7} = 0,2857$$



c) Badakigu $P(E) = 0,6$, $P(F) = 0,8$ eta E eta F gertaerak askeak direla.

Askeak izateagatik:

- $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$

- E^c eta F^c ere askeak dira $\Rightarrow P(E^c \cap F^c) = P(E^c) \cdot P(F^c)$

Beraz: $P(E^c \cap F^c) = P(E^c) \cdot P(F^c) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$

BESTE MODU BAT

$$P(E^c \cap F^c) = P(E \cup F)^c = 1 - P(E \cup F) = 1 - [P(E) + P(F) - P(E \cap F)]$$

$$= 1 - [P(E) + P(F) - P(E) \cdot P(F)] = 1 - [0,6 + 0,8 - 0,6 \cdot 0,8] = 0,08$$

BESTE MODU BAT: kontingentzia-aula edo bi sarrerako taula baten bidez

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$$

	F	F^c	
E	0,48	0,12	0,6
E^c	0,32	0,08	0,4
	0,8	0,2	1

Beraz: $P(E^c \cap F^c) = 0,08$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. Banaketa normala ulertzea eta erabiltzea.

Enpatia-test baten emaitza $X \equiv \mathcal{N}(4,8, \sigma)$

a) Desbideratze tipikoaren kalkulua.

$$P(X \leq 4) = 0,4$$

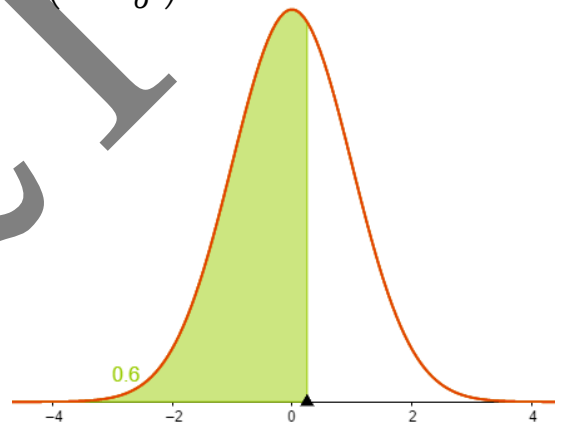
$$\star P(X \leq 4) = 0,4 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0,4 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{4-4,8}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{-0,8}{\sigma}\right) = 0,4$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{0,8}{\sigma}\right) = 0,4 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{0,8}{\sigma}\right) = 0,4 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{0,8}{\sigma}\right) = 0,6$$

Banaketaren taulan $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$ bilatzen dugu:

$$P\left(Z \leq \frac{0,8}{\sigma}\right) = 0,6 \Rightarrow \frac{0,8}{\sigma} = 0,255 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{0,8}{0,255} = 3,137$$



b) $\sigma = 3,14$ bada, populazioaren % 35ek soilik gainditzen duen k puntuazioaren balioa.

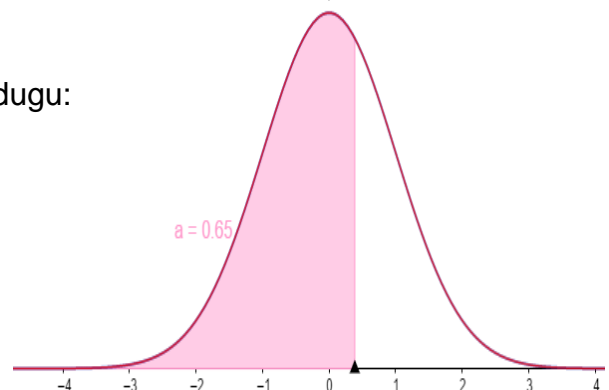
$$X \equiv \mathcal{N}(4,8, 3,14)$$

$$P(X \leq k) = 0,65 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0,65 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k-4,8}{3,14}\right) = 0,65$$

Banaketaren taulan $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$ bilatzen dugu:

$$\frac{k-4,8}{3,14} = 0,385 \Rightarrow$$

$$k = 4,8 + 0,385 \cdot 3,14 = 6$$



Beraz, populazioaren % 35ek soilik lortzen du 6 puntu baino gehiagoko emaitza.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

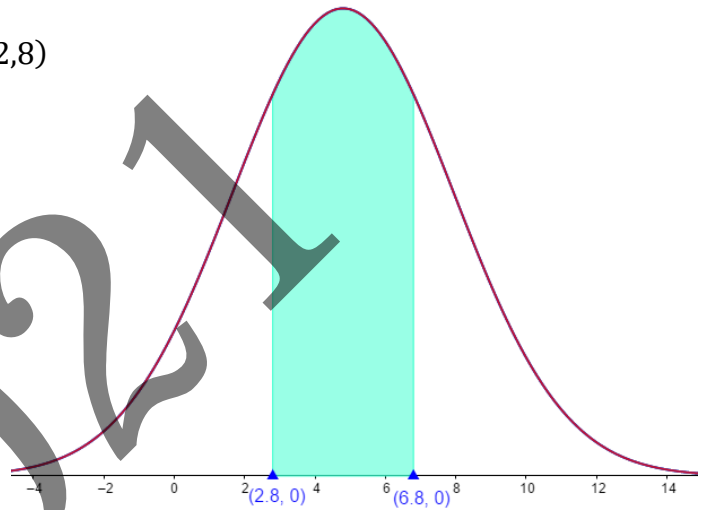
c) $\sigma = 3,14$ bada, kalkulatu $P(\mu - 2 \leq X \leq \mu + 2)$.

$$X \equiv \mathcal{N}(4,8, 3,14)$$

$$\star X \equiv \mathcal{N}(\mu = 4,8, \sigma = 3,14)$$

$$\star P(\mu - 2 \leq X \leq \mu + 2) = ?$$

$$\begin{aligned} P(\mu - 2 \leq X \leq \mu + 2) &= P(4,8 - 2 \leq X \leq 4,8 + 2) = P(2,8 \leq X \leq 6,8) = \\ &= P(X \leq 6,8) - P(X \leq 2,8) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bullet P(X \leq 6,8) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{6,8-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{6,8-4,8}{3,14}\right) = P\left(Z \leq \frac{2}{3,14}\right) = P(Z \leq 0,64) = \\ &= \mathbf{0,7389} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(X \leq 2,8) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2,8-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2,8-4,8}{\sigma}\right) = P(Z \leq -0,64) = P(Z \geq 0,64) = \\ &= 1 - P(Z \leq 0,64) = 1 - 0,7389 = \mathbf{0,2611} \end{aligned}$$

Beraz:

$$P(\mu - 2 \leq x \leq \mu + 2) = P(X \leq 6,8) - P(X \leq 2,8) = 0,7389 - 0,2611 = \mathbf{0,4778}$$

$$\Rightarrow \% \mathbf{47,78}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.4. Laginen batezbestekoaren banaketari buruzko ariketa. Batezbestekorako konfiantza-tartea. Laginaren tamaina eta errore maximo onargarria.

Asteburu batean gazteek egiten duten gastua $X \equiv \mathcal{N}(\mu, 6)$

a) Laginaren batezbestekoaren balioa eta hautatutako laginaren tamaina.

• Laginaren batezbestekoaren balioa $\equiv \bar{x}$

- ✚ Badakigu batezbestekorako konfiantza-tartea (24,47, 26,43) dela, % 95eko konfiantza-mailaz.
- ✚ Laginaren batezbesteko balioa konfiantza-tartearen erdiko puntua da.

Beraz:

$$\bar{x} = \frac{24,47 + 26,43}{2} = 25,45 \Rightarrow \bar{x} = \mathbf{25,45}$$

• Hautatutako laginaren tamaina.

- ✚ $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatu dugu.

Konfiantza-maila: $n_c = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,025 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,025 \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

- ✚ Batezbestekorako errore maximoa konfiantza-tartearen zabalera erdia da.

Beraz:

$$e = \frac{26,43 - 24,47}{2} = \mathbf{0,98}$$

Batezbestekorako errorearen formula aplikatuz, laginaren tamaina lortzen dugu:

$$e = 0,98 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \frac{6}{0,98} = 12 \Rightarrow n = \mathbf{144}$$

b) $n = 49$ izanik, batezbestekorako errore maximo onargarria % 97ko konfiantza-mailaz.

- ✚ $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatu dugu.

Konfiantza-maila: $n_c = 0,97 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = \mathbf{2,17}$

$P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,015 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,015 \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$

**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

✚ Formula aplikatuz, laginaren tamaina lortzen dugu:

$$e = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}} \Rightarrow e = 1,86$$

2021