eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II

USE 2021

www.ehu.eus

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde guztietan kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

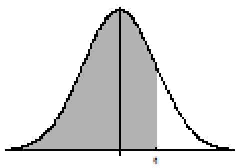
Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Eztabaidatu honako ekuazio-sistema hau, α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1, \\ 3x - y + \alpha z = \alpha, \\ x + (\alpha - 1)z = 1. \end{cases}$$

Ebatzi sistema $\alpha = 3$ kasuan, ahal bada.

B1 Ariketa

Izan bedi honako matrize hau:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zehaztu α parametroaren zer baliotarako A matrizeak ez duen alderantzizkorik.

b) Kalkulatu, ahal bada, A-ren alderantzizko matrizea $\alpha = 2$ kasuan.

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bitez $A = (1, a, -1)$ eta $B = (b, 1, 1)$ puntuetatik pasatzen den r zuzena, eta $x + y - 2z = 2b$ ekuazioko π planoa.

a) Kalkulatu a eta b parametroen balioak r zuzena π planoarekiko perpendikularra izan dadin.

b) Kalkulatu a eta b parametroen balioak r zuzena π planoaren barruan gera dadin.

B2 Ariketa

Aurkitu $P = (-2, 1, 0)$ puntutik pasatzen den eta r zuzena perpendikularki ebakitzen duen zuzenaren ekuazio parametrikoak, r zuzenak ekuazio parametriko hauek baditu:

$$\{x = 1 - 2t,\ y = 1 + t,\ z = t\}.$$

Kalkulatu P puntutik bi zuzenen ebaki-punturako distantzia.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Aztertu $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$ funtzioaren maximoak, minimoak eta gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak. Egin f-ren adierazpen grafikoa.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

a) Aurkitu A, B eta C parametroen balioak f-ren grafikoa $(0, 1)$ puntutik pasa dadin eta minimo bat izan dezan $(1, 1)$ puntuan.

b) Lortutako funtzioak beste maximo edo minimorik al du? Horrela bada, aurkitu.

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Izan bitez honako funtzio hauek: $f(x) = 1/x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^2/8$.

a) Marraztu hiru funtzio horien grafikoek lehen koadrantean mugatzen duten eremu finitua.

b) Kalkulatu eremu horren azalera.

B4 Ariketa

Kalkulatu, erabilitako metodoak azalduz,

$$I = \int (x + 2) \sin(2x)\, dx \qquad \text{eta} \qquad J = \int \frac{x + 7}{x^2 - 4x - 5}\, dx.$$

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Farmazia batean A, I eta M motetako sendagaien sorta bat jaso da. % 80 A sendagaiari dagokio, % 10 I sendagaiari, eta gainerakoa M sendagaiari. Farmazialariak egindako berrikuspenean ikusi da iraungitako sendagaiak daudela, honako ehuneko hauetan: A motako sendagaien % 10, I motako sendagaien % 20 eta M motako sendagaiaren % 5. Sendagai-kaxa bat aukeratzen da zoriz. Kalkulatu:

a) Iraungitako sendagai bat izateko probabilitatea.

b) Sendagaia iraungita dagoela baldin badakigu, A motakoa izateko probabilitatea.

B5 Ariketa

Hiri batean 3900 pertsona aukeratu dira zoriz. Kalkulatu:

a) Patroiaren egunean urteak betetzen dituzten pertsonen kopurua gutxienez 15 izateko probabilitatea.

b) Patroiaren egunean urteak betetzen dituzten pertsonen kopurua 5 eta 15 artean, biak barne, izateko probabilitatea.

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak -kalkuluetan egindakoak eta abar- ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A.1.

- Matrizearen determinantea kalkulatzea eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = 2$ eta $\alpha = 1$ kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu).
- $\alpha = 3$ kasua ebaztea (0,75 puntu).

B.1.

- a) atala zuzen ebaztea (1,25 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (1,25 puntu).

A.2.

- a) atala zuzen ebaztea (1,25 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (1,25 puntu).

B.2.

- Zuzenaren ekuazioa zuzen kalkulatzea (2 puntu).
- P puntutik bi zuzenen ebaki-puntura dagoen distantzia kalkulatzea (0,5 puntu).

A.3.

- Gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak modu egokian lortzea (0,75 puntu).
- Puntu kritikoak lortzea (0,75 puntu).
- Funtzioaren grafikoa zuzen lortzea (1 puntu).

B.3.

- a) atala zuzen ebaztea (2 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).

A.4.

- Eremua ondo marraztea eta hiru funtzioen grafikoen ebaki-puntuak kalkulatzea (1,25 puntu).
- Eremuaren azalera kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).

B.4.

- I Integrala zuzen kalkulatzea, erabilitako metodoa azalduz (1,25 puntu).
- J Integrala zuzen kalkulatzea, erabilitako metodoa azalduz (1,25 puntu).

A.5.

- Ariketaren planteamendu zuzena (0,5 puntu).
- a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

B.5.

- Probabilitate-eredua zuzen identifikatzea (0,5 puntu).
- a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Sistemaren determinantea $-(\alpha-2)(\alpha-1)$ da; beraz, $\alpha \neq 2$ eta $\alpha \neq 1$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$\alpha = 1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena 3 da; beraz, sistema BATERAEZINA DA.

$\alpha = 2$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena ere 2 da; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA DA.

$\alpha = 3$ bada, sistemaren soluzioa honako hau da: $x=-1$, $y=-3$, $z=1$.

B1 EBAZPENA

Matrize baten alderantzizkoa ez da existitzen haren determinantea zero bada eta $|A| = 0$ da $\alpha = 1$ eta $\alpha = 3$ bada. Gainera, A matrizeak alderantzizkoa du $\alpha = 2$ bada, eta alderantzizko hori honako hau da: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

A2 EBAZPENA

a) r zuzenaren norabide bektorea, $(b-1, 1-a, 2)$, eta π planoaren bektore normala, $(1,1,-2)$, paraleloak izan behar dira. Orduan, $(b-1,1-a,2) = \alpha(1,1,-2)$, eta hemendik $a=2$ eta $b=0$ ateratzen da.

b) r zuzena π planoaren barruan egon dadin:

- Zuzenaren norabide bektorea eta planoaren bektore normala perpendikularrak izan behar dira. Orduan, bektore haien biderkadura eskalarrak zero izan behar du. Beraz, $(b-1, 1-a, 2)\cdot(1,1,-2) = 0$, eta hemendik honako ekuazio hau ateratzen da: $b-a-4=0$.
- $A = (1, a, -1)$ puntua π planoan egon behar da. A puntua π planoaren ekuazioan ordezkatzen denean, ekuazio hau ateratzen da: $-2b + a = -3$.

Ekuazio-sistema ebatziz, $a=-5$ eta $b=-1$ lortzen da.

B2 EBAZPENA

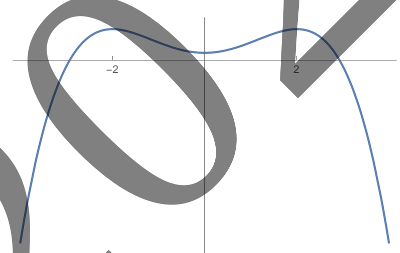
$P=(-2,1,0)$ puntua eta r zuzena hartzen duen π planoaren ekuazioa $-2x+y+z=5$ da. Beraz, π planoaren eta r zuzenaren arteko ebaki-puntua $P_0=(-1,2,1)$ da. r zuzenaren zuzen perpendikularra lortzeko, zuzen horren norabide bektorea, $\overrightarrow{PP_0}=(1,1,1)$, eta $P=(-2,1,0)$ puntua ditugu. Orduan, eskatutako zuzenaren ekuazio parametrikoak $x=-2+t$, $y=1+t$, $z=t$ dira.

P eta P_0 puntuen arteko distantzia, $\overrightarrow{PP_0}$ bektorearen modulua da; beraz, $\sqrt{3}$ u.

A3 EBAZPENA

Izan bedi $f(x)=5+8x^2-x^4$ funtzioa. Haren deribatua $f'(x)=16x-4x^3$ da, eta $x=-2$, $x=0$ eta $x=2$ puntuetan anulatzen da. Funtzioa gorakorra da $(-\infty,-2)$ eta $(0,2)$ tarteetan, eta beherakorra da $(-2,0)$ eta $(2,\infty)$ tarteetan.

Funtzioak $x=2$ eta $x=-2$ puntuetan maximoak ditu eta $x=0$-an minimoa du.

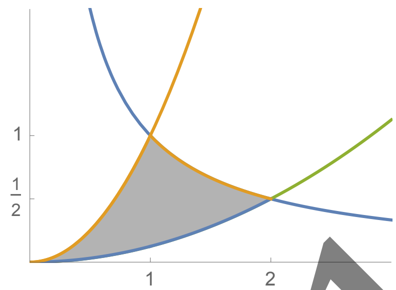


B3 EBAZPENA

Emandako baldintzak kontuan hartuta $A=1$, $B=-2$ eta $C=1$ izango dira, eta, orduan, $f(x)=x^3-2x^2+x+1$. f-ren deribatua, $f'(x)=3x^2-4x+1$, nulua da $x=1$ eta $x=1/3$ denean. Beraz, funtzioak $x=1$-ean minimoa du eta $x=1/3$ puntuan maximoa du.

A4 EBAZPENA

Eskatutako esparrua hiru funtzioen grafikoek mugatzen duten eremua da. Funtzioen grafikoen ebaki-puntuak: (0,0), (1,1) eta (2,1/2) dira.



Eremuaren azalera honako integralen batura honen bidez kalkulatzen da:

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx = \ln 2 \ u^2.$$

B4 EBAZPENA

I integrala kalkulatzeko zatikako integrazioa erabil daiteke, $\int udv = uv - \int vdu$, non $u = x + 2$, eta $dv = \sin(2x)dx$ diren. Horrekin $du = dx$ da eta $v = -\dfrac{\cos(2x)}{2}$. Beraz,

$$I = \int (x+2)\sin(2x)dx = -\frac{(x+2)\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + K.$$

J integrala kalkulatzeko, funtzioa frakzio sinpleetan deskoposatu behar da:

$$\frac{x+7}{x^2 - 4x - 5} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1},$$

eta, eragiketak eginez, $A = 2$ eta $B = -1$ balioak lortzen dira. Beraz,

$$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} dx = 2\ln|x-5| - \ln|x+1| + K.$$

A5 EBAZPENA

Probabilitate baten kalkulua, zuhaitz-diagramaren bidez eta probabilitate baldintzatuaren bidez ebazten dena.

Gertaerak honako hauek dira: A: A taldeko sendagai bat hartzea, I: I taldeko sendagai bat hartzea, M: M taldeko sendagai bat hartzea; C: iraungita dago, C': ez dago iraungita.

a) $P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(I) \cdot P(C/I) + P(M) \cdot P(C/M) = 0,08 + 0,02 + 0,005 = 0,105$.

b) $P(A/C) = \dfrac{P(A) \cdot P(C/A)}{P(C)} = \dfrac{0,08}{0,105} = 0,762$.

B5 EBAZPENA

Banaketa binomiala da, $B(3900, 1/365)$. $np \geq 5$ eta $nq \geq 5$ direnez, $N(10,68; 3,26)$ banaketa normalarekin hurbil daiteke.

a) $P(x \geq 15) = P(x' > 14,5) = P\Big(z > \dfrac{14,5 - 10,68}{3,26}\Big) = P(z > 1,17) = 1 - 0,8790 = 0,121$

b) $P(5 \leq x \leq 15) = P(4,5 < x' < 15,5) = P\Big(\dfrac{4,5 - 10,68}{3,26} < z < \dfrac{15,5 - 10,68}{3,26}\Big) = P(-1,90 < z < 1,48) = 0,9306 - (1 - 0,9713) = 0,9019$.