

eman ta zabal zazu

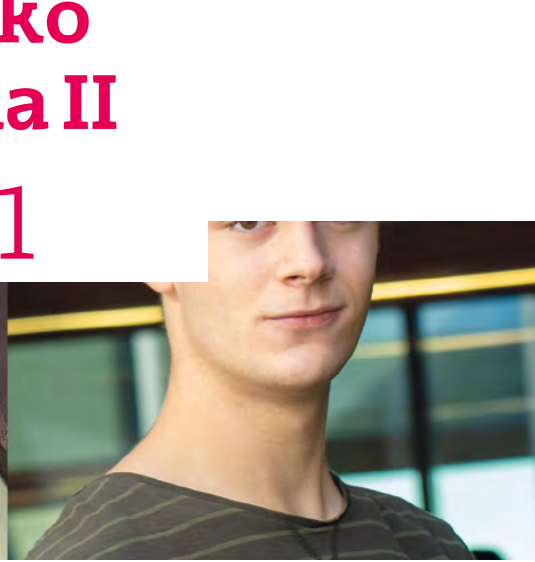


Universidad
del País Vasco Euskal Herriko
Unibertsitatea



Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II USE 2021

www.ehu.eus



- **Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta.**

Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.

- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

- **Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques.**

De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. [gehienez 2,5 puntu]

$f(x, y) = 5x + 4y$ funtzioaren maximoa eta minimoa lortu nahi dira honako murrizketa hauek definitutako esparruan:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

- [1 puntu] Irudika ezazu aipatutako esparrua.
- [1,5 puntu] Kalkula ezazu zer puntutan dituen funtzioak maximoa eta minimoa, baita funtzioaren balioak ere puntu horietan.

B.1. [gehienez 2,5 puntu]

Izan bitez honako matrize hauek: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- [0,75 puntu] $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$ berdintza egiaztatzen da? Arrazoitu erantzuna.
- [1,75 puntu] Ebatzi honako ekuazio matrizial hau:

$$X \cdot A = 2B^t + I_2$$

BLOKEA: ANALISIA

A.2. [gehienez 2,5 puntu]

Izan bedi $f(x)$ funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{baldin eta } -2 \leq x < 0 & \text{bada} \\ -x + 2 & \text{baldin eta } 0 \leq x < 2 & \text{bada} \\ x^2 - 4x + 4 & \text{baldin eta } 2 \leq x \leq 4 & \text{bada} \end{cases}$$

- [1 puntu]** Azter ezazu funtzioaren jarraitutasuna $[-2, 4]$ tartean.
- [0,5 puntu]** Egin ezazu funtzioaren adierazpen grafikoa.
- [1 puntu]** Kalkula ezazu funtzioak eta OX abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera.

B.2. [gehienez 2,5 puntu]

Enpresa baten ekoizpen-kostua, $f(x)$, milaka eurotan neurtuta, fabrikatutako produktu kantitatearen arabera da, x , tonatan neurtuta:

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

Gehieneko ekoizpen-ahalmena 2 tona da.

- [1,25 puntu]** Azter itzazu enpresaren ekoizpen-kostuaren funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.
- [0,75 puntu]** Zehaztu zer kantitate ekoiztu behar duen enpresak ekoizpen-kostua minimizatzeko. Zein izango litzateke kostu minimo hori?
- [0,5 puntu]** Zer kantitaterekin lortzen du enpresak ekoizpen-kostu maximoa? Zehaztu zenbat den aipatutako kostu maximo hori.

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. *gehienez 2,5 puntu*

Liburutegi batean 60 ekintzazko eleberri eta 20 beldurrezko eleberri daude. Janirek eleberri bat aukeratu du zoriz, eta eraman egin du. Ondoren, Enekok beste eleberri bat aukeratuko du, zoriz.

- 1 puntu* Zein da Janirek eta Enekok ekintzazko eleberriak aukeratzeko probabilitatea?
- 0,75 puntu* Zer probabilitate dago Enekok aukeratutako eleberria ekintzazkoa izateko?
- 0,75 puntu* Enekok aukeratu duen eleberria ekintzazkoa izan bada, zein da Janirek aukeratutakoa beldurrezkoa izanaren probabilitatea?

B.3. *gehienez 2,5 puntu*

Luciak bi dioptria ditu begi batean eta dioptria bat bestean, eta Nereak bi dioptria begi bakoitzean. Neska bakoitzak dioptria bateko 10 lentilla eta bi dioptriako beste 10 lentilla dituen poltsa bat dauka. Bakoitzak bi lentilla aterako ditu poltsatik, zoriz.

- 1,25 puntu* Zer probabilitate du neska bakoitzak behar dituen lentillak aukeratzeko?
- 1,25 puntu* Luciaren poltsan bi lentilla akastun daude. Gaizki daudenak baztertzeko asmoz, bata bestearen atzetik aterako ditu biak aurkitu arte. Zer probabilitate dago bi akastunak hirugarren saiakeran aurkitzeko?

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. *gehienez 2,5 puntu*

Trafiko Zuzendaritza Nagusiaren azterlan baten arabera, gidabaimena lortzeko behar diren praktika-orduen kopuruak $\mathcal{N}(24, 9)$ banaketa normal bati jarraitzen dio.

- 1,25 puntu* Kalkula ezazu zer probabilitate dagoen 20 praktika-ordu baino gutxiagorekin gidabaimena lortzeko.
- 1,25 puntu* Zenbat ordu behar izan ditu Andreak gidabaimena lortzeko baldin eta badakigu gidarien % 89k berak baino ordu gehiago behar izan dituela?

B.4. *gehienez 2,5 puntu*

Populazio jakin bateko familiek urtean ostalaritza-zerbitzuetan egiten duten batez besteko gastua ezagutzeko, familiako zorizko lagin bat aukeratu da; hortik abiatuta, jakin da, % 95eko konfiantza-mailaz, batezbestekoaren konfiantza-tartea (820, 830) dela.

Badakigu urteko gastuak 80 euroko desbideratze tipikoa duen banaketa normal bati jarraitzen diola.

- 1 puntu* Kalkula ezazu laginetik lortutako batezbestekoa.
- 1,5 puntu* Kalkula ezazu zenbat familiak osatu duten lagina.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II (2021eko EZOHIOA)

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi ariketaz osatuta dago.
2. **Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute**
3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.
6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

.BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, ...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa $2,5$ dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **1 puntu.** Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea.
- Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,125 puntu; guztira, **0,5 puntu.**
 - Eskatutako esparrua zehaztea, **0,5 puntu.**
- b. **1,5 puntu.** Maximo eta minimo erlatiboa zehaztea, eta haietan, funtzioaren balioak.
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea, **0,75 puntu.**
 - Funtzioa erpinetan ebaluatzea, **0,5 puntu.**
 - Helburu-funtzioaren balioa zehaztea, **0,25 puntu.**

B.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **0,75 puntu.** Berdintza egiaztatzea.
- Egiaztatzea A eta B matrizeak trukakorrak direla, **0,5 puntu.**
 - Berdinketa egiaztatzea arrazoituz, **0,25 puntu.**
- b. **1,75 puntu.** Ekuazio matriziala ebaztea.
- X zehaztea, **0,5 puntu.**
 - $2B^t + I_2 = C$ matrizea kalkulatzeko, **0,25 puntu.**
 - A matrizearen alderantzizkoaren kalkulua:
 - A matrizearen determinantearen kalkulua, **0,15 puntu.**
 - A matrizearen adjuntuaren kalkulua, **0,25 puntu.**
 - A matrizearen alderantzizkoaren kalkulua, **0,1 puntu.**
 - X matrizearen kalkulua, **0,5 puntu.**



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: ANALISIA

A.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **1 puntu.** Funtzioaren jarraitutasuna $[-2, 4]$ tartean.
- Jarraitutasuna $[-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4]$ tartean, **0,2 puntu.**
 - Jarraitutasuna $x = 0$ puntuan.
 - Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,15 puntu.**
 - Alboko limiteak, **0,25 puntu.**
 - Jarraitutasuna $x = 2$ puntuan.
 - Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,15 puntu.**
 - Alboko limiteak, **0,25 puntu.**
- b. **0,5 puntu.** Adierazpena grafikoa.
- Zuzen bakoitzaren adierazpena 0,1 puntu, hau da, **0,2 puntu.**
 - Parabolaren adierazpena, **0,3 puntu.**
- c. **1 puntu.** Funtzioak eta OX abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera.
- $A_1 + A_2 + A_3$ integral mugatuen zehaztapena, **0,25 puntu.**
 - Integral mugatuen kalkulua.
 - A_1 integral mugatua kalkulatzeko, **0,3 puntu.**
 - A_2 integral mugatua kalkulatzeko, **0,15 puntu.**
 - A_3 integral mugatua kalkulatzeko, **0,3 puntu.**

B.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **1,25 puntu.** Funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zehaztea.
- Lehenengo deribatuaren kalkulua, **0,25 puntu.**
 - Funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zehaztea, **1 puntu.**
- b. **0,75 puntu.**
- Funtzioaren muturren kalkulua, **0,4 puntu.**
 - Funtzioaren minimoa zehaztea, **0,2 puntu.**
 - Kostu minimoa kalkulatzeko, **0,15 puntu.**
- c. **0,5 puntu.**
- Funtzioaren maximoa zehaztea modu arrazoituan, **0,35 puntu.**
 - Ekoizpen-kostu maximoaren balioa zehaztea, **0,15 puntu.**



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Zuhaitz-diagrama bat edo eskemaren bat egitea, **0,5 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu**.

b. 0,75 puntu.

- Probabilitate osoaren teorema adieraztea, **0,25 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu**.

c. 0,75 puntu.

- A posteriori probabilitatea, Bayes-en teorema, adieraztea, **0,25 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu**.

B.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,25 puntu.

- Zuhaitz-diagrama bat edo eskemaren bat egitea, **0,5 puntu**.
- Lucíaren probabilitatearen kalkulua, **0,375 puntu**.
- Nerearen probabilitatearen kalkulua, **0,375 puntu**.

b. 1,25 puntu.

- Zuhaitz-diagrama bat edo eskemaren bat egitea, **0,5 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,75 puntu**.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,25 puntu.

- Aldagaiaren tipifikazioa, **0,5 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,75 puntu.**

b. 1,25 puntu.

- Problemaren planteamendua, **0,25 puntu.**
- Konturatzea negatiboa dela, **0,2 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,45 puntu.**
- Eskatutako x_0 balioa zehaztea, **0,35 puntu.**

B.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Laginaren batezbestekoa zer den adieraztea, **0,5 puntu.**
- Laginaren batezbestekoa zehaztea, **0,5 puntu.**

b. 1,5 puntu.

- $\frac{z_\alpha}{2}$ determinatzea, **0,3 puntu**
- Errore maximo onargarria zer den adieraztea **0,3 puntu.**
- Errore maximo onargarria zehaztea **0,3 puntu.**
- Errore maximo onargarriaren formula adieraztea, **0,3 puntu.**
- Laginaren tamaina zehaztea, **0,3 puntu.**

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPENAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. Bi aldagaiko programazio linealeko problemaren ebazpena.

a) Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan.

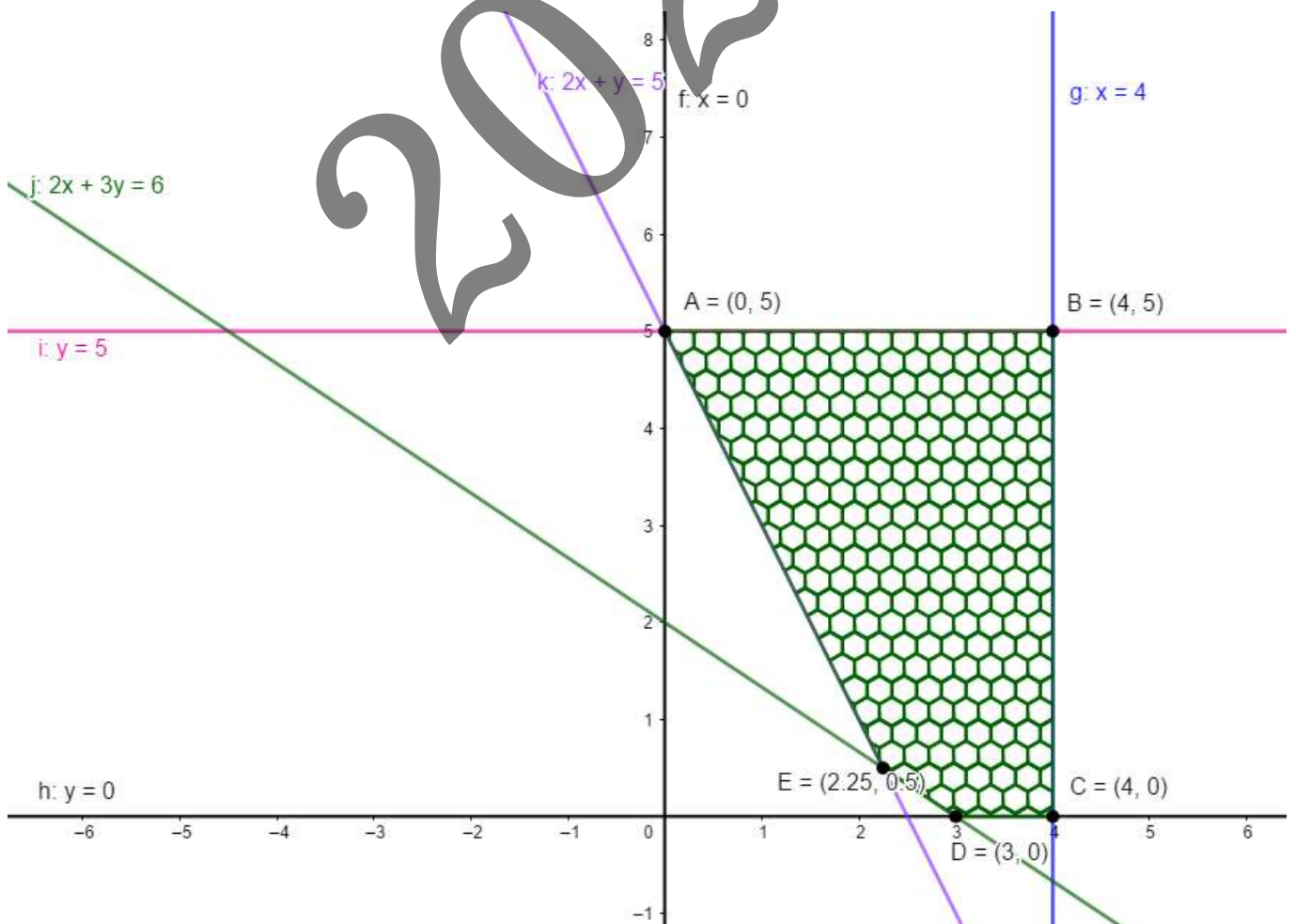
📌 Helburu-funtzioa hau da:

$$f(x, y) = 5x + 4y$$

📌 Murrizketak hauek dira:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \end{cases}$$

📌 Beraz, XY planoan hau da soluzio bideragarrien esparrua:



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

b) Helburu-funtzioaren maximoa eta minimoa, bai eta aipatutako puntuetan funtzioak dituen balioak ere.

✚ Erpinak hauek dira:

- $A(0, 5)$, $B(4, 5)$, $C(4, 0)$, $D(3, 0)$
- $E = ?$

$$\bullet E = \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{6-3y}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow E\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A(0, 5), B(4, 5), C(4, 0), D(3, 0), E\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

✚ $f(A) = f(0, 5) = 20$

$$f(B) = f(4, 5) = 40$$

$$f(C) = f(4, 0) = 20$$

$$f(D) = f(3, 0) = 15$$

$$f(E) = f\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{53}{4} = 13,25$$

✚ Beraz, funtzioaren balio minimoa $E\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$ puntuan lortzen da, eta puntu horretan funtzioaren balioa **13,25** da.

Funtzioaren balio maximoa $B(4, 5)$ puntuan lortzen da, eta puntu horretan funtzioaren balioa **40** da.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.1 Kalkulu matriziala: Matrizeen propietateak. Ekuazio matrizial bat ebaztea.

Izan bitez $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$ berdintza betetzen da?

$$\oplus A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\oplus B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Beraz, A eta B matrizeak trukakorak dira, hau da, $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow$

$$(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

Eta ondorioztatzen dugu, **kasu honetan, berdintza egiaztatzen dela.**

b) Ebatzi $X \cdot A = 2B^t + I_2$

$$\oplus X \cdot A = 2B^t + I_2 = C \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = C \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$X = C \cdot A^{-1}$$

$$\oplus C = 2B^t + I_2 \Rightarrow C = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\oplus A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2/7 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \checkmark |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 \\ \checkmark A_{11} = -7 & A_{21} = -2 \\ A_{12} = 0 & A_{22} = -1 \end{array} \right.$$

Beraz:

$$\oplus X = C \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -35 & -10 \\ -14 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10/7 \\ -2 & -3/7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -5 & -10/7 \\ -2 & -3/7 \end{pmatrix}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: ANALISIA

A.2. Funtzio baten jarraitutasuna aztertzea. Funtzioaren balioen kalkulua eta abzisa-ardatzarekin sortzen duen eskualdearen azalera kalkulatzeko.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & -2 \leq x < 0 \quad \text{bada} \\ -x + 2 & 0 \leq x < 2 \quad \text{bada} \\ x^2 - 4x + 4 & 2 \leq x \leq 4 \quad \text{bada} \end{cases}$$

a) Jarraitutasuna $[-2, 4]$ tartean.

- $f(x)$ jarraitua da $[-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4]$ tartean, polinomio gisa definituta egoteagatik.

- $f(x)$ jarraitua $x = 0$ puntuan $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 2) = 2$$

$$f(0) = 2$$

Ondorioz, $f(x)$ jarraitua da $x = 0$ puntuan.

- $f(x)$ jarraitua da $x = 2$ puntuan $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 2) = 0$$

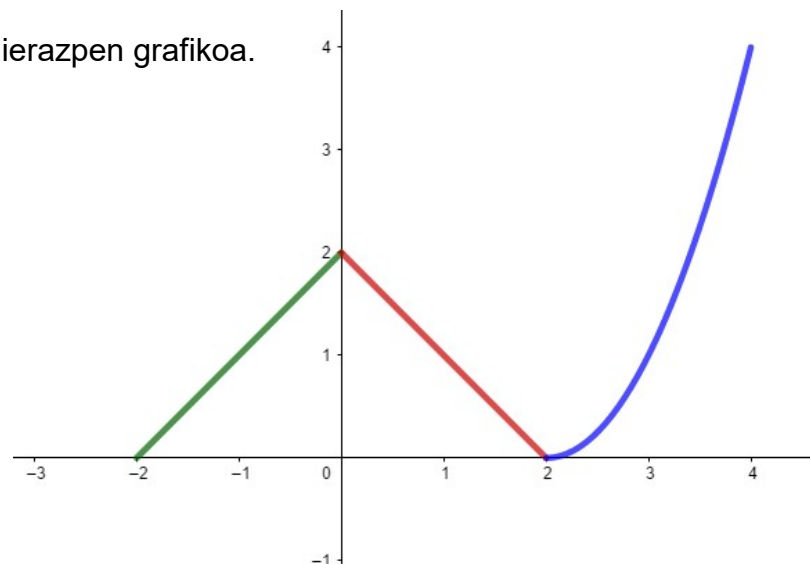
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$$

Ondorioz, $f(x)$ jarraitua da $x = 2$ puntuan.

- Beraz, $f(x)$ jarraitua da $[-2, 4]$ tartean.

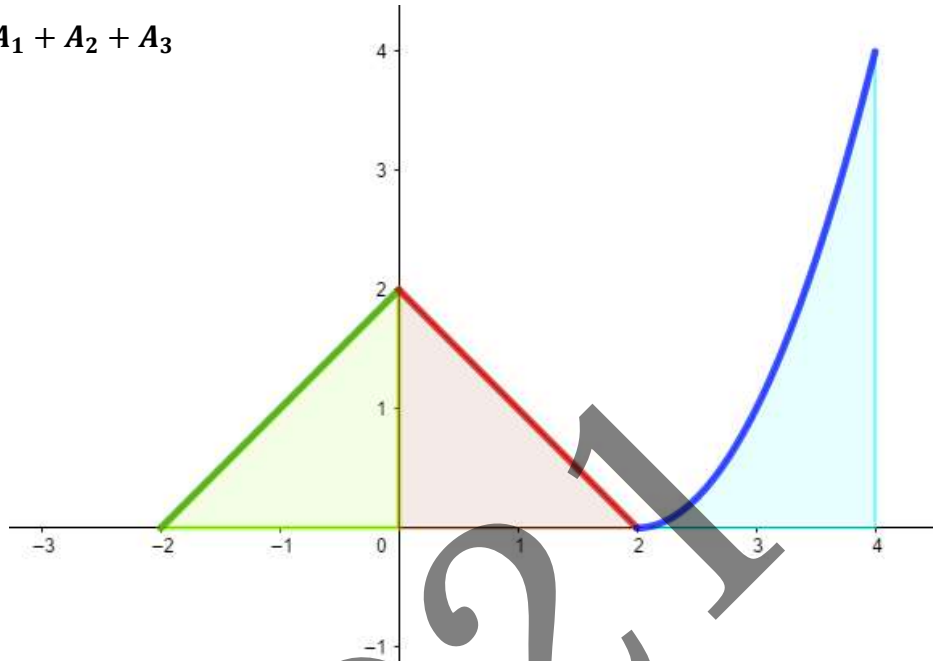
b) Funtzioaren adierazpen grafikoa.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

c) Funtzioak eta OX abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera.

$$\color{red}{\blacksquare} \quad A = A_1 + A_2 + A_3$$



$$\color{red}{\blacksquare} \quad A_1 = \int_0^2 [(-x+2) - 0] dx = \int_0^2 (-x+2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = (-2+4) - 0 = 2 \text{ u}^2$$

$$\color{red}{\blacksquare} \quad A_2 = A_1 = 2 \text{ u}^2$$

$$\begin{aligned} \color{red}{\blacksquare} \quad A_3 &= \int_2^4 [(x^2 - 4x + 4) - 0] dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^4 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_2^4 = \\ &= \left(\frac{64}{3} - 32 + 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 \right) = \frac{56}{3} - 16 = \frac{8}{3} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

$$\color{red}{\blacksquare} \quad \text{Beraz: } A = A_1 + A_2 + A_3 = 2 + 2 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} \text{ u}^2$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.2 Funtzio baten azterketa. Funtzioaren balioen kalkulua, maximo eta minimo erlatiboak, inflexio-puntuak eta adierazpen grafikoa.

a) Gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zehazteko, lehenengo deribatuaren zeinua aztertuko dugu:

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 \Rightarrow f'(x) = -3(x-1)(x-3)$$

	0	1	2	3	4
$(x-1)$	-		+		+
$(x-3)$		-		-	+
$f'(x) = -3(x-1)(x-3)$	-		+		-

Beraz, $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ tartean beherakorra da, eta $(1, 3)$ tartean gorakorra da. Baina gehieneko ekoizpen-ahalmena 2 tona denez, funtzioa $0 \leq x \leq 2$ tartean baino ez dago definiturik \Rightarrow **$(0, 1)$ tartean beherakorra da eta $(1, 2)$ tartean gorakorra da.**

b) Maximo eta minimoak kalkulatuko ditugu:

- $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$ puntu singularrak, baina $3 \notin [0, 2]$

- $f''(x) = -6x + 12$

$$f''(1) = -6 + 12 = 6 > 0 \Rightarrow f(1) = 26 \Rightarrow \mathbf{(1, 26) \text{ minimoa}}$$

Beraz, $x = 1$ balioarentzat, ekoizpen-kostua minimoa da, eta **26 000 € balio du.**

c) Zer kantitaterekin lortzen du enpresak ekoizpen-kostu maximoa?

- $f(0) = 30$ eta funtzioa beherakorra da $(0, 1)$ tartean.

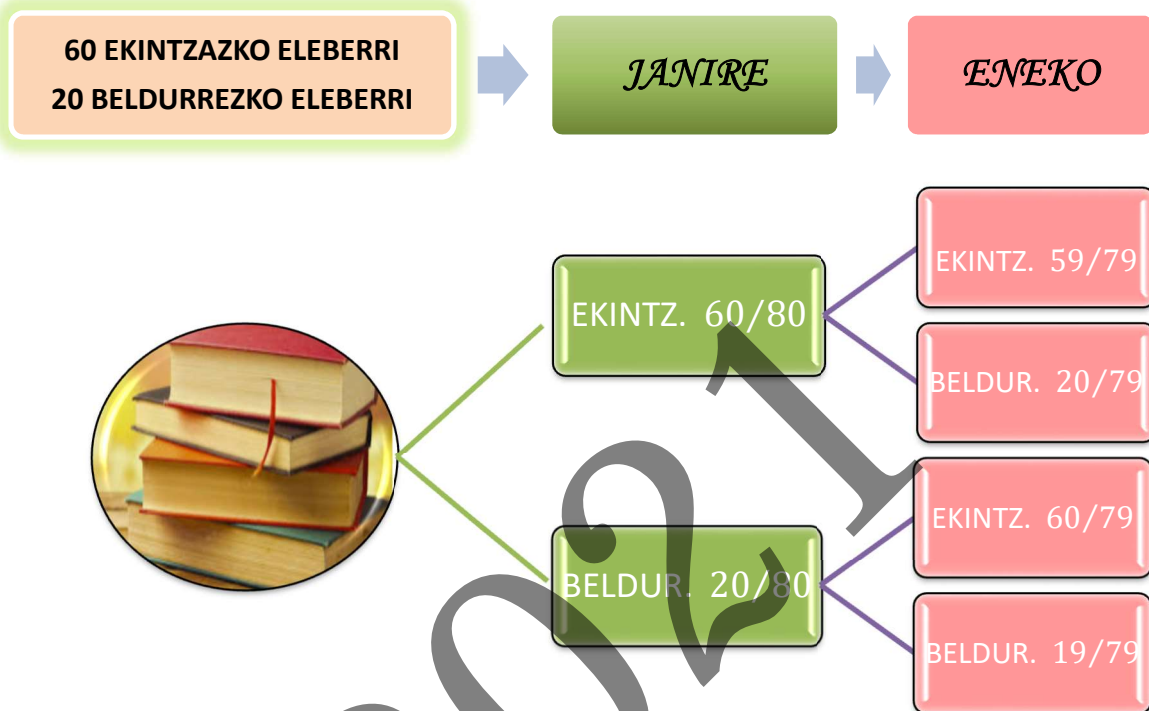
- $f(1) = 26$, $f(2) = 28$ eta funtzioa gorakorra da $(1, 2)$ tartean.

Beraz, $x = 0$ balioarentzat, ekoizpen-kostua maximoa da, eta **30 000 € balio du.**

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3 Kontingentzia-taula baten bidez edo probabilitate baldintzatuaren bidez ebatz daitekeen probabilitate-kalkuluaren ariketa.



a) Janirek eta Enekok ekintzazko eleberriak aukeratzeko probabilitatea.

$$P(J.ekintzazkoa \cap E.ekintzazkoa) = P(J.ekintz.) \cdot P(E.ekintz. | J.ekintz) = \\ = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} = \frac{177}{316} = 0,56 \Rightarrow \% 56$$

b) Enekok aukeratutako eleberria ekintzazkoa izateko probabilitatea.

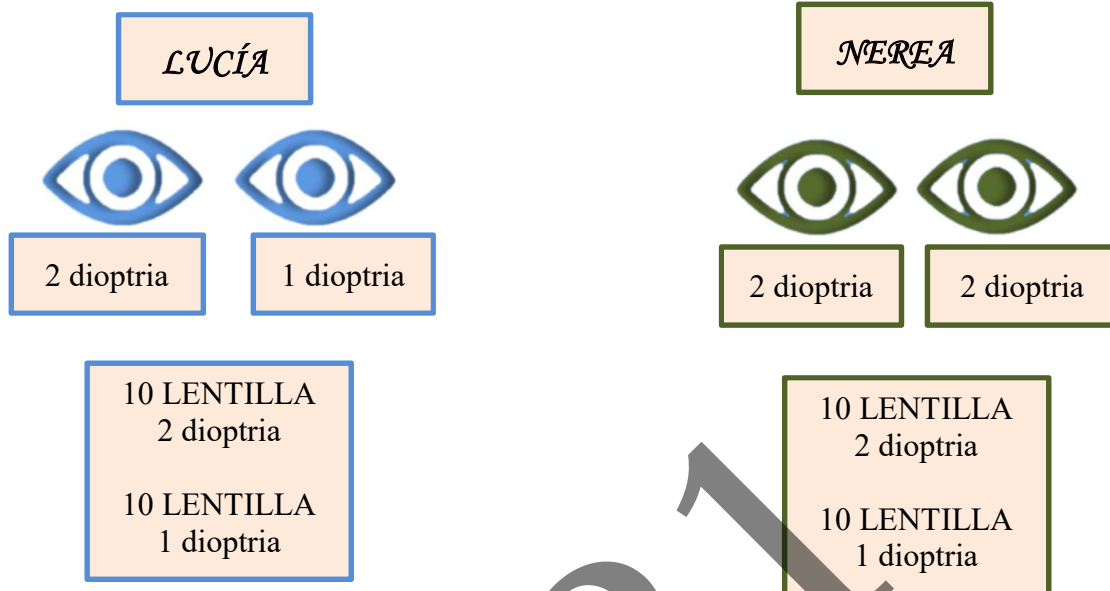
$$P(E.ekintzazkoa) = \\ = P(J.ekintz.) \cdot P(E.ekintz. | J.ekintz.) + P(J.beldur.) \cdot P(E.ekintz. | J.beld.) = \\ = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \% 75$$

c) Enekok aukeratutako eleberria ekintzazkoa izan bada, zein da Janirek aukeratutakoa beldurrezkoa izanaren probabilitatea?

$$P(J.beld. | E.ekintz.) = \frac{P(J.beld. \cap E.ekintz.)}{P(E.ekintz.)} = \\ = \frac{P(J.beld.) \cdot P(E.ekintz. | J.beld.)}{0,75} = \frac{\frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}}{0,75} = \frac{0,18987}{0,75} = 0,2532 \Rightarrow \% 25,32$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.3. Probabilitate-kalkuluei buruzko ariketa.

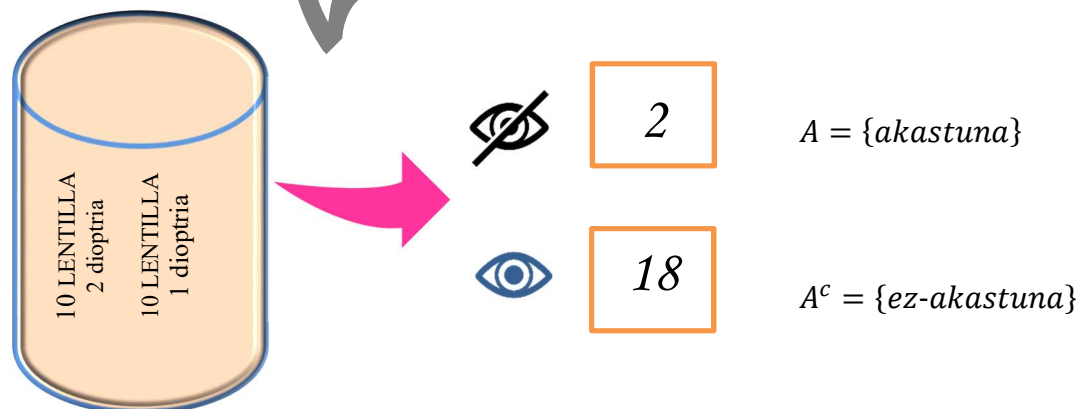


a) Neska bakoitzak behar dituen lentillak aukeratzeko probabilitatea.

$$P(LUCÍA) = P(2_d \cap 1_a) + P(1_a \cap 2_d) = 2 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{200}{380} = 0,526 \Rightarrow \% 52,6$$

$$P(NEREA) = P(2_a \cap 2_d) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{90}{380} = 0,237 \Rightarrow \% 23,7$$

b) Lucíak bi akastunak hirugarren saiakeran aurkitzea lortzeko probabilitatea.



$$P(2 akastunak 3. saiakeran) = P(A \cap A^c \cap A) + P(A^c \cap A \cap A) =$$

$$= \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} + \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = 2 \cdot \frac{36}{6840} = 0,0105 \Rightarrow \% 1,0526$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

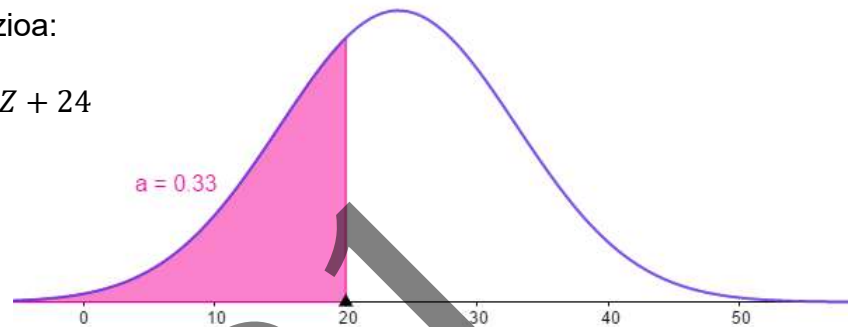
A.4. Banaketa normala ulertzea, erabiltzea eta probabilitate-kalkulua.

a) 20 praktika-ordu baino gutxiagorekin gidabaimena lortzeko probabilitatea.

$$X \equiv N(\mu, \sigma) = \mathcal{N}(24, 9)$$

✚ X aldagaiaren tipifikazioa:

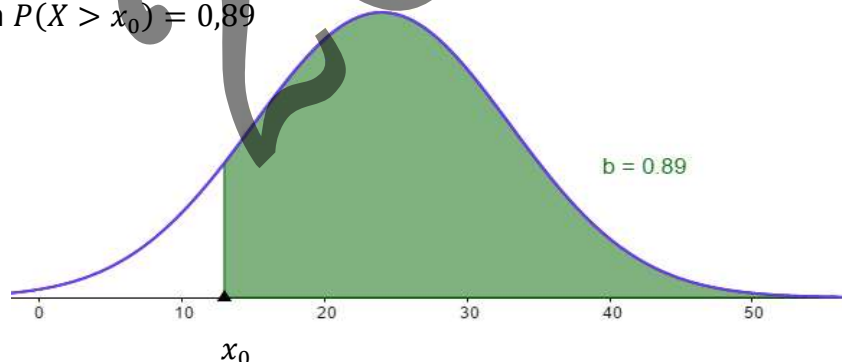
$$Z = \frac{X - 24}{9} \Rightarrow X = 9Z + 24$$



✚ $P(X < 20)$

$$\begin{aligned} P(X < 20) &= P\left(\frac{X - 24}{9} < \frac{20 - 24}{9}\right) = P\left(Z < \frac{20 - 24}{9}\right) = P\left(Z < \frac{-4}{9}\right) = \\ &= P(Z < -0,444) = P(Z \geq 0,444) = 1 - P(Z \leq 0,444) = 1 - 0,67 = \\ &= 0,33 \Rightarrow \mathbf{P(X < 20) = 0,33 \Rightarrow \% 33} \end{aligned}$$

b) x_0 ? non $P(X > x_0) = 0,89$



✚ $P(X > x_0) = 0,89 \Rightarrow P(X \leq x_0) = 1 - 0,89 \Rightarrow P(X \leq x_0) = 0,11 \Rightarrow$

$$P(9Z + 24 \leq x_0) = 0,11 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x_0 - 24}{9} = k\right) = 0,11$$

✓ $\frac{x_0 - 24}{9} = k$ (negatiboa da, probabilitatea 0,5 baino txikiagoa baita);

orduan, simetriaz:

$$P(Z \leq -k) = 0,89 \Rightarrow -k = -\frac{x_0 - 24}{9} = 1,23 \Rightarrow \mathbf{x_0 = 12,93}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B. 4. Laginen batezbestekoaren banaketari buruzko ariketa. Laginaren batezbestekoaren balioa. Laginaren tamaina eta errore maximo onargarria.

Familiak urtean ostalaritza-zerbitzuetan egiten duten batez besteko gastua $X \equiv \mathcal{N}(\mu, 80)$

a) Kalkulatu laginetik lortutako batezbestekoa, hau da, laginaren batezbestekoaren balioa: \bar{x}

✚ Badakigu batezbestekorako konfiantza-tartea (820,830) dela, % 95eko konfiantza-mailaz.

✚ Laginaren batezbesteko balioa konfiantza-tartearen erdiko puntua da. Beraz:

$$\bar{x} = \frac{820 + 830}{2} = 825 \Rightarrow \bar{x} = 825$$

b) Kalkulatu lagina osatu duten familien kopurua.

✚ $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatu dugu:

Konfiantza-maila: $n_c = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

✚ Batezbestekorako errore maximo onargarria konfiantza-tartearen zabalera erdia da.

Beraz:

$$e = \frac{830 - 820}{2} = 5$$

✚ Errore maximo onargarriaren formula aplikatuz, laginaren tamaina lortuko dugu:

$$e = 5 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{80}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \frac{80}{5} = 31,36 \Rightarrow n = 983,45$$

Beraz, laginaren tamaina **984 familia da**.