eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II

USE 2021

www.ehu.eus

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

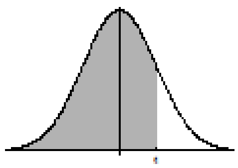
En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2021eko EZOHIKOA	*EXTRAORDINARIA 2021*
MATEMATIKA II	*MATEMÁTICAS II*



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Eztabaidatu honako ekuazio-sistema hau, α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z = \alpha, \\ 2x + \alpha y + z = 2 + \alpha, \\ x - \alpha y + 2z = 2\alpha. \end{cases}$$

Ebatzi sistema $\alpha = 1$ kasuan, ahal bada.

B1 Ariketa

Izan bitez

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kalkulatu honako hau betetzen duen 2×2 ordenako X matrizea:

$$A^2 \cdot X + B = C.$$

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bedi r ekuazio parametriko hauek dituen zuzena:

$$\{x = t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1 + 3t\},$$

eta izan bitez $A = (1, 2, 3)$ eta $B = (3, 2, 1)$. Aurkitu r zuzenarekiko paraleloa den eta A eta B puntuetatik pasatzen den planoaren ekuazioa. Kalkulatu r-tik plano horretarako distantzia.

B2 Ariketa

Izan bitez $A = (0, 2, 1)$, $B = (1, b, 0)$, $C = (-1, 0, 2)$ eta $D = (1, 1, 1)$ puntuak.

a) Kalkulatu b parametroaren balioa A, B, C eta D plano berean egon daitezen.

b) A, B, C eta D puntuak hartzen dituen planoa PQ zuzenkiarekiko perpendikularra da, eta bi parte berdinetan ebakitzen du. $P = (1, 2, -3)$ bada, kalkulatu Q puntuaren koordenatuak.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Aztertu $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$ funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, eta kalkulatu haren maximoak eta minimoak.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A, B eta C parametroen balioak $x = 0$ abszisa duen puntuan f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea $y = 2x - 1$ izan dadin, eta $x = 1$ abszisa duen puntuan f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea horizontala izan dadin.

$x = 1$ abszisa duen puntuan dagoen muturra zer da, maximoa edo minimoa?

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Marraztu $y = 4x - x^2$ eta $y = x^2 - 6$ parabolek mugatzen duten eremua eta kalkulatu haren azalera.

B4 Ariketa

Kalkulatu $\int x \ln(x+1)\,dx$, eta azaldu erabilitako metodoa.

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Ikastetxe batek dituen 700 ikasleetatik, 500 ikastetxea dagoen auzokoak dira, 575k jantoki-zerbitzua erabiltzen dute, eta 400 auzokoak dire eta jantoki-zerbitzua erabiltzen dute. Ikasle bat aukeratzen da zoriz.

a) Auzokoa bada, zein da jantoki-zerbitzua erabiltzeko probabilitatea?

b) Jantoki-zerbitzua erabiltzen badu, zein da auzokoa ez izateko probabilitatea?

c) Zein da auzokoa izateko edo jantoki-zerbitzua erabiltzeko probabilitatea?

d) Zein da auzokoa ez izateko eta jantoki-zerbitzua ez erabiltzeko probabilitatea?

B5 Ariketa

Herri jakin bateko biztanleriaren altuerak banaketa normal bati jarraitzen dio, batezbestekoa 1,74 cm eta desbideratze tipikoa 0,05 cm izanik. Biztanle bat aukeratzen da zoriz.

a) Zein da bere altuera batezbestekoaren berdina edo txikiagoa izateko probabilitatea?

b) Zein da bere altuera 1,64 eta 1,84 cm artean egoteko probabilitatea?

c) Biztanleria 1500 pertsonaz osatuta badago, zenbatek dute 1,54 cm baino altuera txikiagoa?

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak -kalkuluetan egindakoak eta abar- ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A.1.

- Matrizearen determinantea kalkulatzea eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = -2$ eta $\alpha = 1$ kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu).
- $\alpha = 1$ kasua ebaztea (0,75 puntu).

B.1.

- Problema planteatzea eta A^2 matrizearen alderantzizkoa kalkulatzea (1,25 puntu).
- X matrizea zuzen kalkulatzea (1,25 puntu).

A.2.

- Planoaren ekuazioa kalkulatzea (1,5 puntu).
- Zuzenaren eta planoaren arteko distantzia lortzea (1 puntu).

B.2.

- b parametroaren balioa zuzen kalkulatzea (1,25 puntu).
- Q puntuaren koordenatuak zuzen kalkulatzea (1,25 puntu).

A.3.

- Funtzioaren lehenengo deribatua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- Funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zuzen kalkulatzea (1 puntu)
- Funtzioaren maximoa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- Funtzioaren minimoa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).

B.3.

- Baldintza guztiak planteatzea eta A, B eta C parametroen balio zuzenak lortzea (2 puntu).
- Eskatutako galderari zuzen erantzutea (0,5 puntu).

A.4.

- Eremua ondo marraztea, eta bi parabolen ebaki-puntuak kalkulatzea. (1,25 puntu).
- Eremuaren azalera kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).

B.4.

- Zatikako integrazioaren metodoa azaltzea (0,5 puntu).
- Integrala zuzen kalkulatzea, zatikako integrazioa erabiliz (2 puntu).

A.5.

- a) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- c) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- d) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).

B.5.

- a) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- c) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

ARIKETEN EBAZPENAK

EBAZPENA A1

Koefizienteen matrizearen determinantea $3(\alpha+2)(\alpha-1)$ da. Orduan, $\alpha \neq -2$ eta $\alpha \neq 1$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$\alpha = -2$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena 3; beraz, sistema BATERAEZINA DA.

$\alpha = 1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da eta matrize zabalduarena ere 2 da; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da.

Sistemaren soluzioa, $\alpha = 1$ denean, $\left(x, \frac{4}{3} - x, \frac{5}{3} - x\right)$ da.

EBAZPENA B1

X matrizea askatuz, honako hau dugu: $X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B)$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Goiko berdintzan ordezkatuz, $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

EBAZPENA A2

Planoaren bektore normala, r zuzenaren $\vec{v} = (1, 2, 3)$ norabide bektorearekiko perpendikularra izan behar da, eta baita ere A eta B puntuek definitzen duten $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$ bektorearekiko perpendikularra. Orduan, planoaren bektore normala $(1, 2, 3) \times (2, 0, -2) = (-4, 8, -4)$ da, eta planoaren puntu bat $A = (1, 2, 3)$ denez, eskatutako planoaren ekuazioa honako hau da: $x - 2y + z = 0$.

Planoaren eta zuzenaren arteko distantzia zuzenaren edozein puntutik planora dagoen distantziaren berdina da. Zuzenaren $(0, 2, 1)$ puntutik $x - 2y + z = 0$ planora dagoen distantzia $\frac{\sqrt{6}}{2}$ u da.

EBAZPENA B2

a) A, C eta D puntuak hartzen dituen planoaren bektore normala $(-1,-2,-1)\times(1,-1,0)=(1,1,3)$ da; beraz, plano horren ekuazioa $x+y+3z-5=0$ da. B puntua plano horretan egon dadin, ordezkatzen dira $B=(1,b,0)$ puntuaren koordenatuak planoaren ekuazioan eta $b=4$ lortzen da.

b) $P=(1,2,-3)$ puntutik igaro eta planoarekiko perpendikularra den zuzenaren ekuazioa kalkulatzen da. Zuzen horren norabide bektorea, emandako planoaen bektore normala da, hots, $(1,1,3)$. Orduan, zuzenaren ekuazio parametrikoak hauek dira: $x=1+t$, $y=2+t$, $z=-3+3t$. Ondoren, planoaren eta aurkitutako zuzenaren ebaki-puntua kalkulatzen da, $P_0=(2,3,0)$. Azkenik, puntu simetrikoa $Q=(3,4,3)$ lortzen da.

EBAZPENA A3

Izan bedi $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-4}$ funtzioa. Haren deribatua $f'(x)=-\dfrac{x^2-8x+4}{(x^2-4)^2}$ da, eta $x=4+2\sqrt{3}$ eta $x=4-2\sqrt{3}$ puntuetan anulatzen da. Funtzioa gorakorra da $(4-2\sqrt{3},2)$ eta $(2,4+2\sqrt{3})$ tarteetan; eta beherakorra da $(-\infty,-2)$, $(-2,4-2\sqrt{3})$ eta $(4+2\sqrt{3},\infty)$ tarteetan.

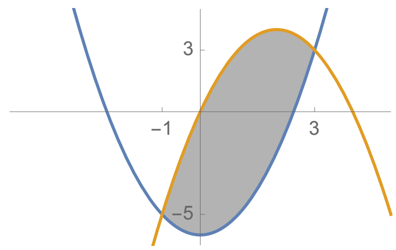
Funtzioak maximoa du $x=4+2\sqrt{3}$ denean, eta minimoa du $x=4-2\sqrt{3}$ denean.

EBAZPENA B3

Emandako baldintzak kontuan hartuta, $A=-3$, $B=2$ eta $C=-1$ dira, eta, orduan, $f(x)=x^4-3x^2+2x-1$ da. f-ren deribatua, $f'(x)=4x^3-6x+2$, nulua da $x=1$, $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ eta $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ denean. Funtzioaren bigarren deribatua $f''(x)=12x^2-6$ da. $f''(1)=6>0$ da; beraz, funtzioak $x=1$ denean minimoa dauka.

EBAZPENA A4

Parabolen ebaki-puntuak $(-1,-5)$ eta $(3,3)$ dira. Eskatutako eremua honako hau da



Eremuaren azalera honako integral honen bidez kalkulatzen da:

$$\int_{-1}^{3}(4x-x^2-x^2+6)dx=\frac{64}{3}u^2.$$

EBAZPENA B4

Integrala zatikako integrazioa erabiliz ebatz daiteke: $\int udv = uv - \int vdu$, non $u = \ln(x+1)$ eta $dv = xdx$ diren. Horrela, $du = \dfrac{dx}{x+1}$ eta $v = \dfrac{x^2}{2}$ dira eta

$$\int x\ln(x+1)\,dx = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + K.$$

EBAZPENA A5

Gertaerak honako hauek dira: B: auzokoa izatea, B': auzokoa ez izatea, C: jantoki-zerbitzua erabiltzea, C': jantoki-zerbitzua ez erabiltzea.

a) $P(C/B) = \dfrac{400}{500} = 0,8.$

b) $P(B'/C) = \dfrac{175}{575} = 0,3.$

c) $P(B\cup C) = P(B)+P(C)-P(B\cap C) = \dfrac{500}{700}+\dfrac{575}{700}-\dfrac{400}{700} = \dfrac{675}{700} \simeq 0,96.$

d) $P(B'\cap C') = \dfrac{25}{700} \simeq 0,04.$

EBAZPENA B5

a) $P(x < 1,74) = 0,5.$

b) $$P(1,64 < x < 1,84) = P\Big(\frac{1,64 - 1,74}{0,05} < z < \frac{1,84 - 1,74}{0,05}\Big)$$
$$= P(-2 < z < 2) = 0,9772 - (1 - 0,9772) = 0,9544.$$

c) $P(x < 1,54) = P\Big(z < \dfrac{1,54 - 1,74}{0,05}\Big) = P(z < -4) = 0$, beraz, ez dago 1,54 baino altuera txoikiagoa duen biztanlerik.