eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
EAU 2020

www.ehu.eus

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Azterketa honek zortzi ariketa ditu. Haietako LAUri erantzun behar diezu.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketa-orrialde guztietan kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
    - pantaila grafikoa
    - datuak igortzeko aukera
    - programatzeko aukera
    - ekuazioak ebazteko aukera
    - matrize-eragiketak egiteko aukera
    - determinanteen kalkulua egiteko aukera
    - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
    - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
    - pantalla gráfica
    - posibilidad de trasmitir datos
    - programable
    - resolución de ecuaciones
    - operaciones con matrices
    - cálculo de determinantes
    - derivadas e integrales
    - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko OHIKOA — ORDINARIA 2020

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II — MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

A 1 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \qquad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?

b) $[\![\boldsymbol{2\ puntos}]\!]$ Resuelve la ecuación matricial.

A 2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ ax + 2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

b) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.

c) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

A 3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

a) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul.

b) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

A 4 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) $[\![\boldsymbol{1,5\ puntos}]\!]$ Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?

b) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

B 1 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.

d) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

B 3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.

Se sabe que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}4$. Calcula:

a) $[\![\boldsymbol{0,65\ puntos}]\!]$ $P(A \cup B)$

b) $[\![\boldsymbol{0,6\ puntos}]\!]$ $P(A^c \cap B^c)$

c) $[\![\boldsymbol{0,6\ puntos}]\!]$ $P(A^c \cap B)$

d) $[\![\boldsymbol{0,65\ puntos}]\!]$ $P(A|B)$

B 4 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntos}]\!]$ ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?

b) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntos}]\!]$ Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. **El examen está compuesto de cuatro ejercicios**.
2. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
3. **Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.**
4. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc. siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

Problema A.1 (2,5 puntos)

a. **0,5 puntos**. Dimensión de la matriz.
b. **2 puntos.** Resolver la ecuación.
   - Cálculo de la inversa de la matriz A:
     - Cálculo del determinante de la matriz X, **0,25 puntos.**
     - Adjunto de la matriz X, **0,5 puntos.**
   - Determinar X, **0,5 puntos.**
   - Traspuesta de la matriz A, **0,25 puntos.**
   - Cálculo de la matriz X, **0,5 puntos.**

Problema A.2 (2,5 puntos)

a. **1 punto.**
   - Definición de la continuidad de una función en un punto, **0,25 puntos.**
   - Límites laterales, **0,5 puntos.**
   - Cálculo del valor de a, **0,25 puntos.**
b. **0,5 puntos.** Representación gráfica.
c. **1 punto.**
   - Delimitar el recinto del área: $\boldsymbol{A = A_1 + A_2}$, **0,25 puntos.**
   - Cálculo de la integral, **0,25 puntos.**
   - Cálculo del área del recinto aplicando la Regla de Barrow, **0,5 puntos.**

Problema A.3 (2,5 puntos)

a. **0,75 puntos.** Cálculo de la probabilidad pedida.
b. **1 punto.** Cálculo de la probabilidad pedida: probabilidad total.
c. **0,75 puntos.** Cálculo de la probabilidad pedida: probabilidad “a posteriori”.

Problema A.4 (2,5 puntos)

a. **1,5 puntos.** Cálculo de cada probabilidad, **0,75 puntos**.
b. **1 punto.**
   - Planteamiento del problema, **0,25 puntos.**
   - Cálculo de los valores, 0,25 puntos cada uno, por lo tanto, **0,75 puntos.**

Problema B.1 (2,5 puntos)

- Determinar la función objetivo, **0,25 puntos.**
- Determinar las restricciones, **0,25 puntos.**
- Representar la región factible, **1 punto.**
- Determinar los vértices de la región factible, **0,5 puntos.**
- Valorar la función en los vértices, **0,25 puntos.**
- Concretar el mínimo y el valor de la función en él, **0,25 puntos.**

Problema B.2 (2,5 puntos)

a. **1 punto.**
   - Cálculo de la derivada, **0,4 puntos.**
   - Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, **0,3 puntos.**
   - Obtención de los máximos y mínimos relativos, **0,3 puntos.**

b. **0,5 puntos.**
   - Definición de asíntota vertical, **0,1 puntos.**
   - Determinar la asíntota horizontal, **0,4 puntos.**

c. **0,5 puntos**
   - Representación de la función, **0,3 puntos.**
   - Representación de la recta, **0,2 puntos.**

d. **0,5 puntos.**
   - Cálculo de la primitiva, **0,3 puntos.**
   - Determinar el parámetro de la primitiva, **0,2 puntos.**

Problema B.3 (2,5 puntos)

a. **0,65 puntos** Cálculo de la probabilidad pedida.
b. **0,6 puntos** Cálculo de la probabilidad pedida.
c. **0,6 puntos** Cálculo de la probabilidad pedida.
d. **0,65 puntos** Cálculo de la probabilidad pedida.

Problema B.4 (2,5 puntos)

a. **1,25 puntos.**
   - Planteamiento, **0,25 puntos.**
   - Tipificación de la variable, **0,25 puntos.**
   - Determinación del valor en tablas, **0,5 puntos.**
   - Cálculo del peso, **0,25 puntos.**

b. **1,25 puntos.**
   - Planteamiento, **0,5 puntos.**
   - Cálculo de la probabilidad, **0,5 puntos.**
   - Concreción de la cantidad, **0,25 puntos.**

SOLUCIONES

A 1 *Dimensión de una matriz. Cálculo matricial. Ecuación matricial.*

a) Dimensión de la matriz X, esto es, $X \in \mathcal{M}_{mxn}$

- $A \in \mathcal{M}_3 \;\Rightarrow\; A^t \in \mathcal{M}_3$
- $A^t \in \mathcal{M}_{3x3} \quad \wedge \;\; B \in \mathcal{M}_{3x1} \;\Rightarrow\; A^t \cdot B \in \mathcal{M}_{3x1}$
- $A \cdot X = A^t \cdot B \in \mathcal{M}_{3x1} \;\Rightarrow\; A \cdot X \in \mathcal{M}_{3x1}$

$$\left.\begin{array}{l} \circ \;\; A \in \mathcal{M}_{3x3} \;\; \wedge \;\; X \in \mathcal{M}_{mxn} \;\Rightarrow\; \exists \; A \cdot B \quad m = 3 \\ \circ \;\; A \in \mathcal{M}_{3x3} \;,\; X \in \mathcal{M}_{3xn} \wedge A \cdot X \in \mathcal{M}_{3x1} \Rightarrow n = 1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X \in \mathcal{M}_{3x1}}$$

b) Resolución de la ecuación matricial: $A \cdot X = A^t \cdot B$.

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$
- $(Adj\ A)^t$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $AX = A^t \cdot B \quad \Rightarrow \; A^{-1}\,AX = A^{-1}A^tB \quad \Rightarrow \; X = A^{-1}A^tB$
- $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- Por lo tanto,

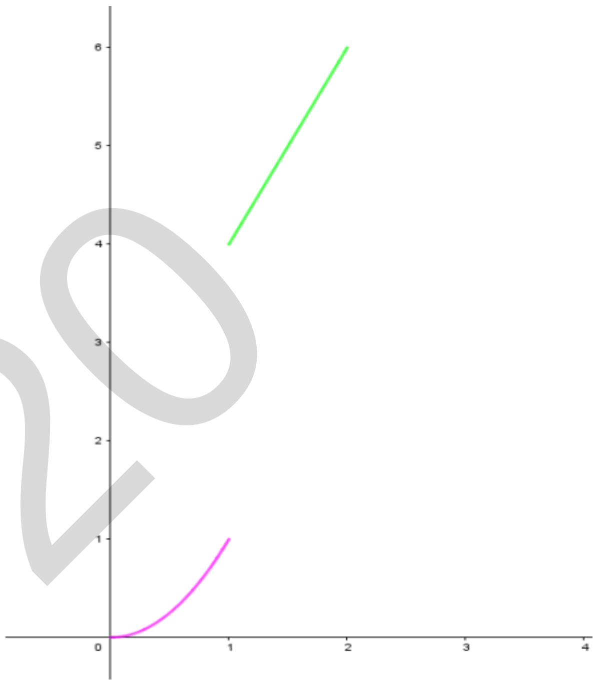
$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-29} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

A 2 *Continuidad de una función. Representación gráfica. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ ax+2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) a tal que $f(x)$ continua en $x = 1 \iff \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (ax+2) = a+2$
- $f(1) = 1^2 = 1$
- Por lo tanto, $a + 2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{a = -1}$



b) Representación gráfica de la función cuando $a = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2x+2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

c) Área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX:

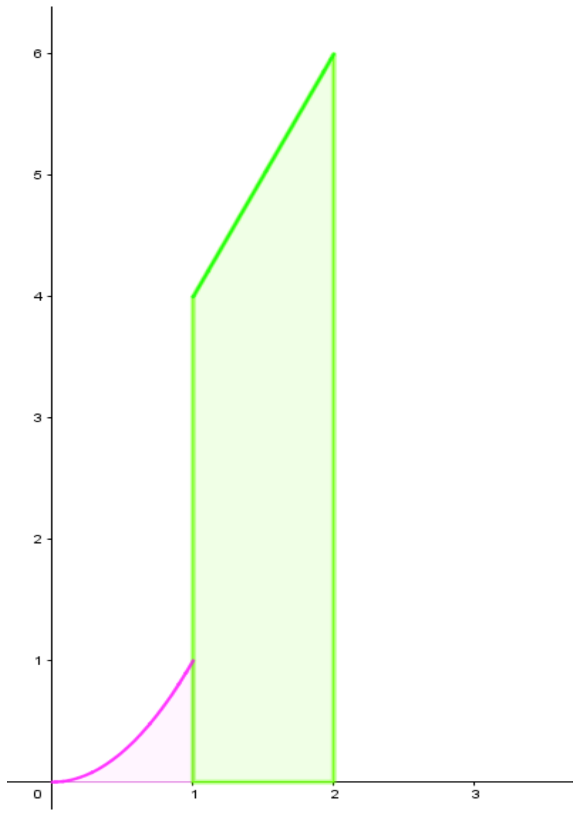
- $\boldsymbol{A = A_1 + A_2}$

- $A_1 = \int_0^1 (x^2 - 0)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\ u^2}$

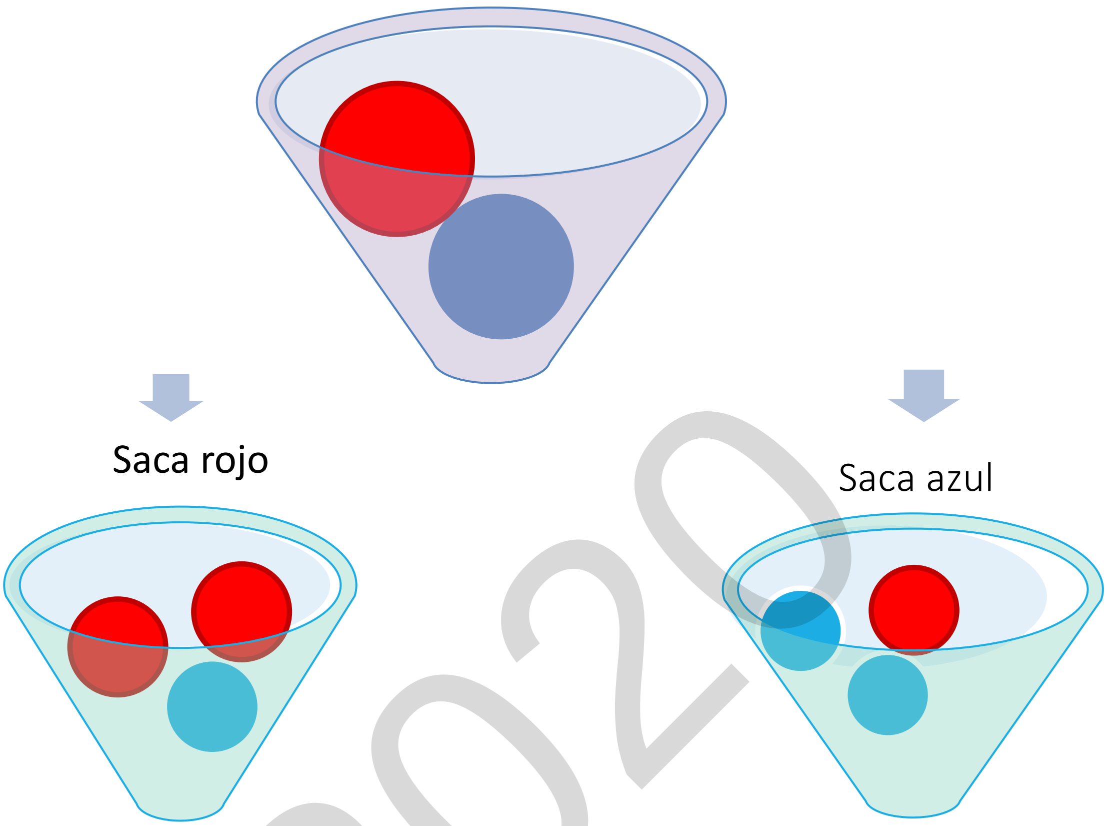
- $A_2 = \int_1^2 (2x+2-0)dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 2x\right]_1^2 =$

$$= [x^2 + 2x]_1^2 = (4+4) - (1+2) =$$
$$= \boldsymbol{5\ u^2}$$

- Esto es: $\boldsymbol{A = \left(\frac{1}{3} + 5\right) u^2 = \frac{16}{3}\ u^2}$



A 3 *Cálculo de probabilidades*; *probabilidad total y probabilidad a posteriori.*



Sucesos;

A_1 = la primera bola azul $\qquad$ A_2 = la segunda bola azul

R_1 = la primera bola roja $\qquad$ R_2 = la segunda bola roja

a) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul: $P(R_2|A_1)$

$$P(R_2|A_1) = \mathbf{1/3}$$

b) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul: $P(A_2)$

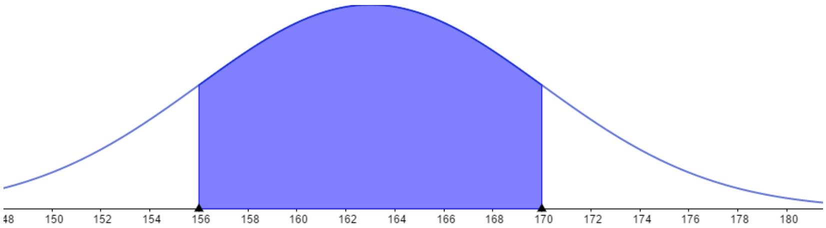
$$P(A_2) = P(R_1)\ P(A_2|R_1) + P(A_1)\ P(A_2|A_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{1/2}$$

c) Si la segunda bola ha sido azul la probabilidad de que la primera fuera roja: $\mathrm{P}(\mathrm{R}_1|\mathrm{A}_2)$

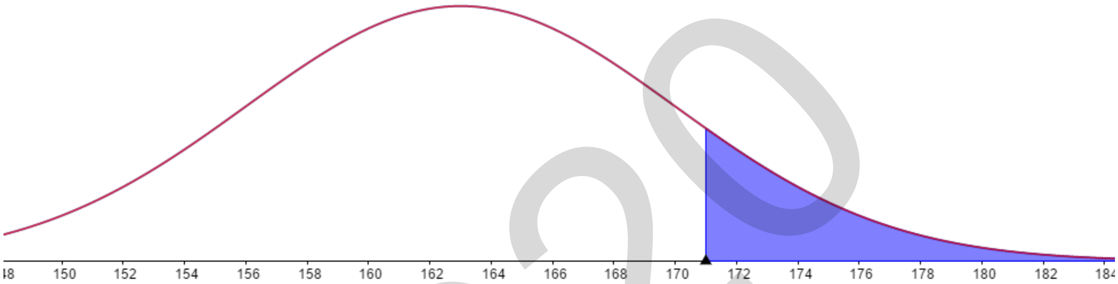
$$\mathrm{P}(\mathrm{R}_1|\mathrm{A}_2) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{A}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)} = \frac{P(R_1)\ P(A_2|R_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \mathbf{1/3}$$

A 4 *Comprensión y utilización de una distribución normal.*

a) $X \equiv \text{altura} \sim N(\ \mu\ , \sigma\ ) = N(\ 163,\ \ 7\ )$



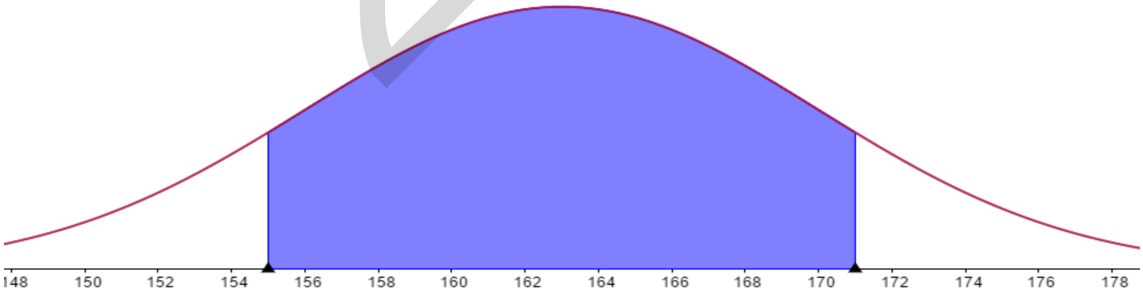
- $P(X > 171)$?



$$P(X > 171) = P\left(\frac{X-163}{7} > \frac{171-163}{7}\right) = P(Z > 1{,}14) = 1 - P(Z \le 1{,}14) =$$

$$=1 - 0{,}8729 = \mathbf{0,1271}$$

- $P\ (155 \le X \le 171)$?



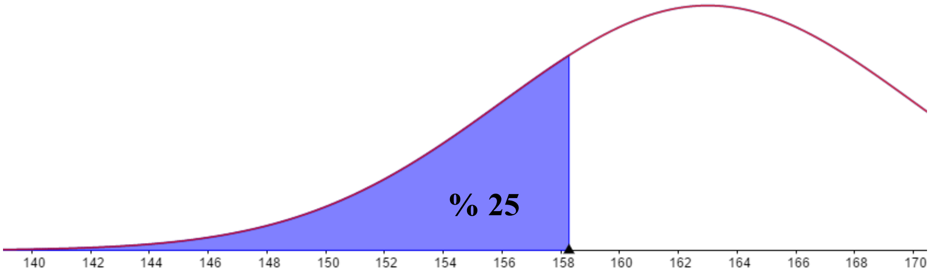
$$P\ (155 \le X \le 171) = P\left(\frac{155-163}{7} \le \frac{X-163}{7} \le \frac{171-163}{7}\right) = P(-1{,}14 \le X \le 1{,}14)$$

$$= 0{,}8729 - (1 - 0{,}8729) = \mathbf{0,7458}$$

b) Cálculo de las alturas que marcan el paso de una talla a otra.

Se deben determinar los puntos a, b y c tales que: $P(X \le a) = 0{,}25$, $P(X \le b) = 0{,}5$ y $P(X \le c) = 0{,}75$.

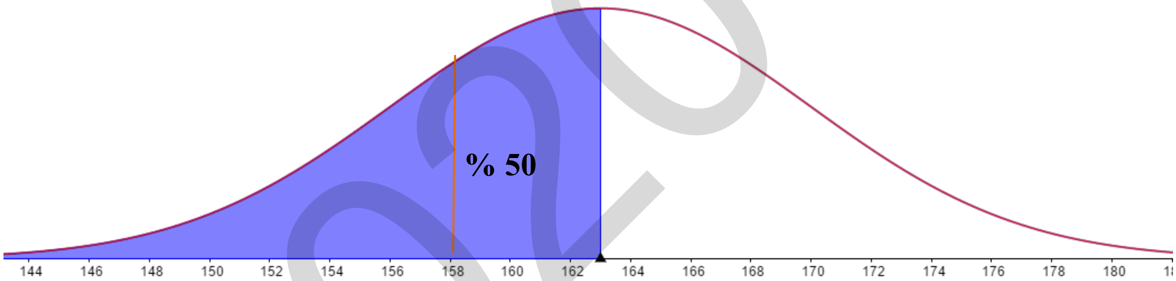
- a ? tal que $P(X \le a) = 0{,}25$



$$P(X < a) = 0{,}25 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{X-163}{7} \le \frac{a-163}{7}\right) = 0{,}25 \;\Rightarrow P\left(Z \le \frac{a-163}{7}\right) = 0{,}25$$

$$\Rightarrow\; \frac{a-163}{7} = -0{,}675 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a = 158{,}275}$$

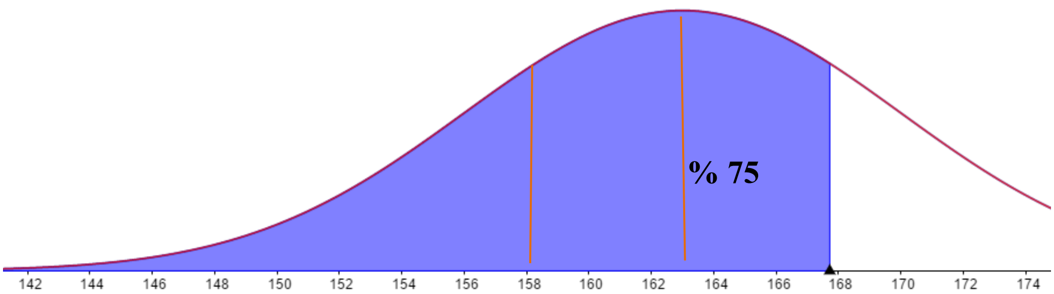
- b ? tal que $P(X \le b) = 0{,}5$



$$P(X < b) = 0{,}5 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{X-163}{7} \le \frac{b-163}{7}\right) = 0{,}5 \;\Rightarrow P\left(Z \le \frac{b-163}{7}\right) = 0{,}5$$

$$\Rightarrow\; \frac{b-163}{7} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b = 163}$$

- c ? tal que $P(X \le c) = 0{,}75$



$$P(X < c) = 0{,}75 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{X-163}{7} \le \frac{c-163}{7}\right) = 0{,}75 \;\Rightarrow P\left(Z \le \frac{c-163}{7}\right) = 0{,}75$$

$$\Rightarrow\; \frac{c-163}{7} = 0{,}675 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{c = 167{,}725}$$

Por lo tanto, las tres alturas que marcarán el paso de una talla a la siguiente son **158,275 cm, 163 cm y 167,725 cm.**

B 1 *Problema de programación lineal con dos variables:*

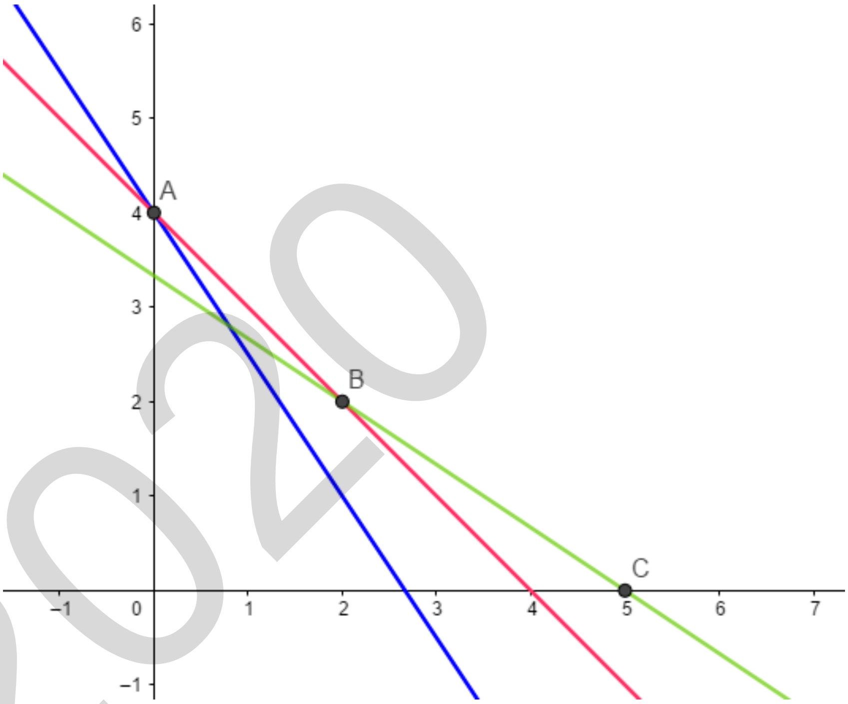
	MUSEO	VISITA GUIADA	ESPECTÁCULO	PRECIO	CANTIDAD
A	6	4	4	210 €	x
B	4	6	4	230 €	y

- La función objetivo es:

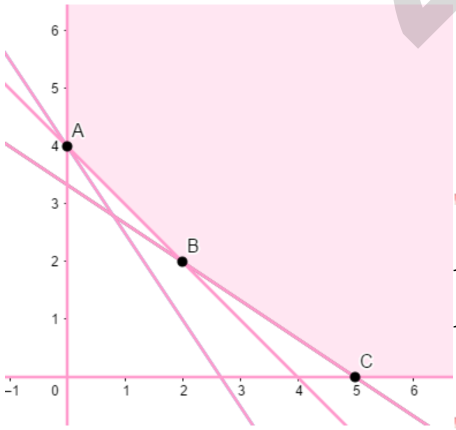
$f(x,y) = 210\,x + 230\,y$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \geq 16 \\ 4x + 6y \geq 20 \\ 4x + 4y \geq 16 \end{cases}$$



- En el plano XY la región factible es:



- Por lo tanto, los vértices son:

$A(0,4)$, $B(2,2)$, $C(5,0)$

- $f(A) = f(0,4) = 920$

$f(B) = f(2,2) = 880$

$f(C) = f(5,0) = 1050$

- Por lo tanto, el valor mínimo de la función se obtiene en el punto $\boldsymbol{B(2,\ 2)}$, y consecuentemente, el guía tiene que comprar dos paquetes a cada agencia para conseguir el coste mínimo, esto es, **880 euros.**

B 2 *Problema de análisis de una función. Cálculo de la función primitiva de una función.*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a) Estudiamos el crecimiento de la función, a través del signo de $f´(x)$:

- $f´(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$
- $f(x)$ es creciente cuando $f´(x) > 0$

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} > 0 \;\Rightarrow\; -x^2+1 > 0 \;\Rightarrow\; (x+1)(x-1) < 0 \;\Rightarrow$$

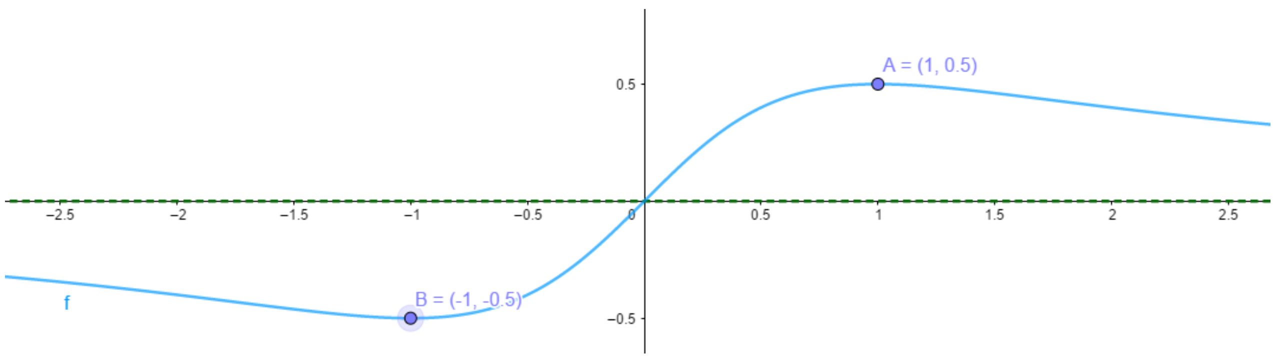
	-1		1
	-2	0	2
$(x+1)$	-	+	+
$(x-1)$	-	-	+
$(x+1)(x-1)$	+	-	+
$\boldsymbol{f(x)}$	↓	↑	↓

Por lo tanto, $\boldsymbol{f(x)}$ **es decreciente en** $(-\infty, -\mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}, \infty)$ **y creciente en** $(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$

- Máximos y mínimos relativos:
  - $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, 1)$, por lo tanto, en el punto de abscisa $x = -1$ la función tiene un mínimo relativo.

    $f(-1) = -{}^{1}\!/_{2} \;\Rightarrow$ el punto $\left(-\mathbf{1}, \; -{}^{\mathbf{1}}\!/_{\mathbf{2}}\right)$ **es un mínimo relativo.**
  - En el intervalo $(-1, 1)$ la función es creciente y en $(1, \infty)$ es decreciente, por lo tanto, en el punto de abscisa $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.

    $f(1) = {}^{1}\!/_{2} \;\Rightarrow$ **el punto** $\left(\mathbf{1}, \; {}^{\mathbf{1}}\!/_{\mathbf{2}}\right)$ **es un máximo relativo.**

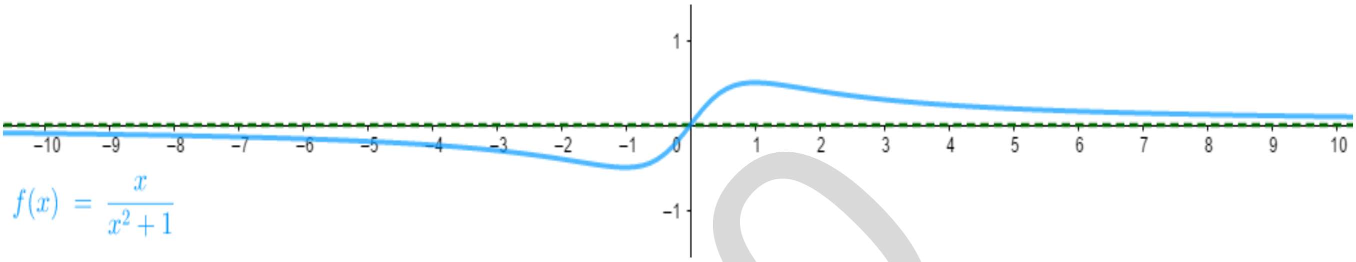


a. Asíntotas verticales:

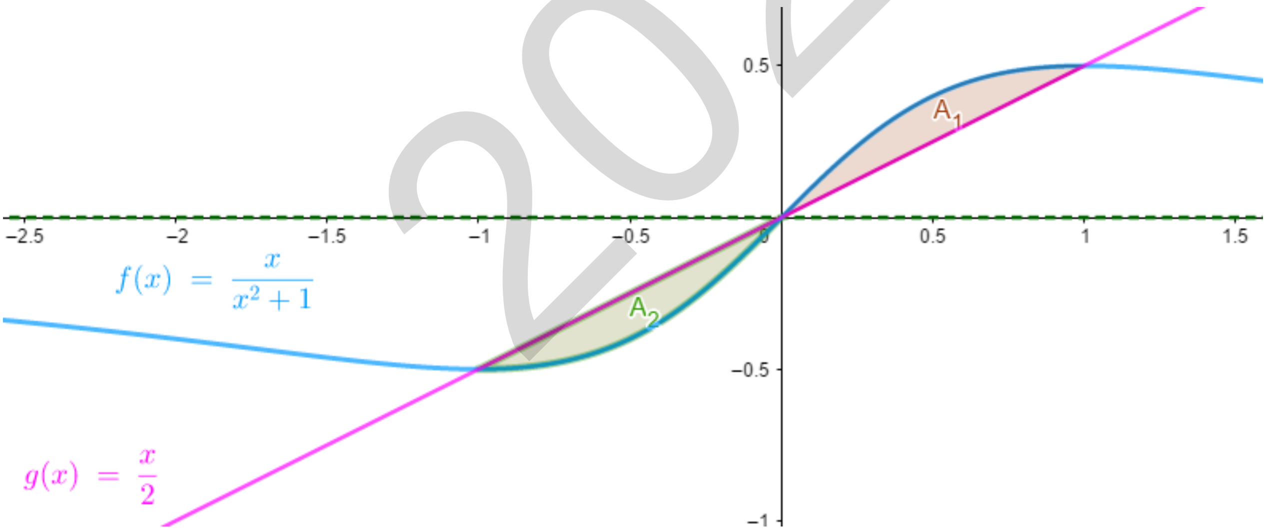
El dominio de definición de $f(x)$ es $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \nexists\, x_0$ tal que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, por lo tanto, la función no tiene asíntotas verticales.

b. Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, por lo tanto, $\boldsymbol{y = 0}$ **asíntota horizontal.**



c) Representar el área de la superficie comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$:



d) Calcular la función primitiva de la función $f(x)$ que tiene el valor 1 cuando $x = 0$:

- Calcularemos $F(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,Ln(x^2+1) + K$$

- Entonces, como $F(0) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{1}{2}\,Ln\,1 + K = 1 \;\; \Rightarrow K = 1$

Por lo tanto, $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}\,Ln(x^2+1) + 1}$

B 3 *Problema de cálculo de probabilidades.*

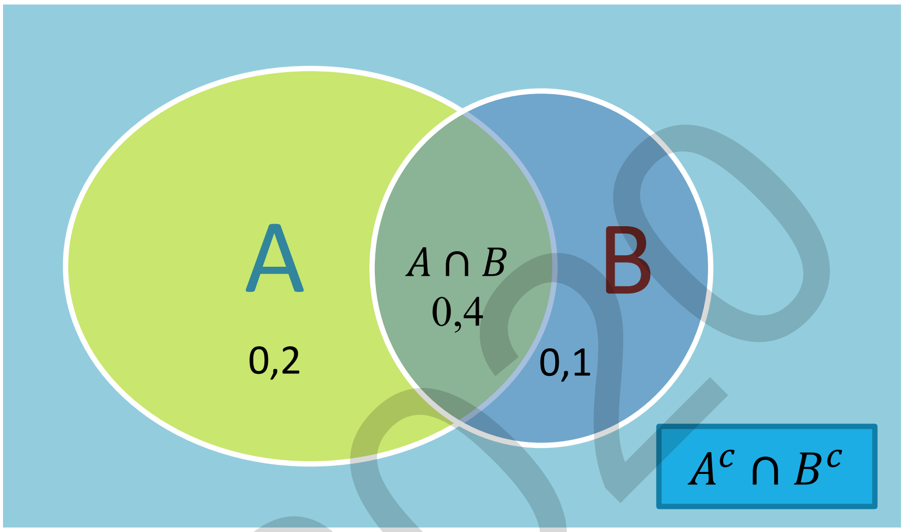
Sabemos $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}4$

a) Calcular: $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}7 \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cup B) = 0,7}$

b) Calcular: $P(A^c \cap B^c)$

$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 \Rightarrow \boldsymbol{P(A^c \cap B^c) = 0,3}$



c) Calcular: $P(A^c \cap B)$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1 \Rightarrow \boldsymbol{P(A^c \cap B) = 0,1}$

d) Calcular: $P(A|B)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{P(A|B) = 0,8}$

OTRA MANERA: a través de una tabla de contingencia o de doble entrada.

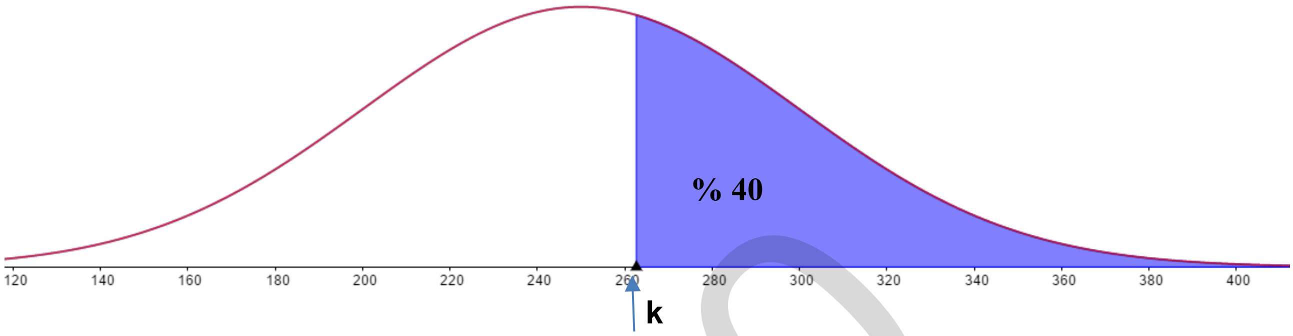
	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{B^c}$	
$\boldsymbol{A}$	0,4	0,2	**0,6**
$\boldsymbol{A^c}$	0,1	0,3	**0,4**
	0,5	**0,5**	**1**

B 4 *Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.*

$X \equiv \text{peso de las truchas} \sim N(250, 50)$

a) Peso mínimo para que la piscifactoría pueda vender el 40 % de las truchas.

- Tenemos que encontrar k tal que $P(X \geq k) = 0{,}4$



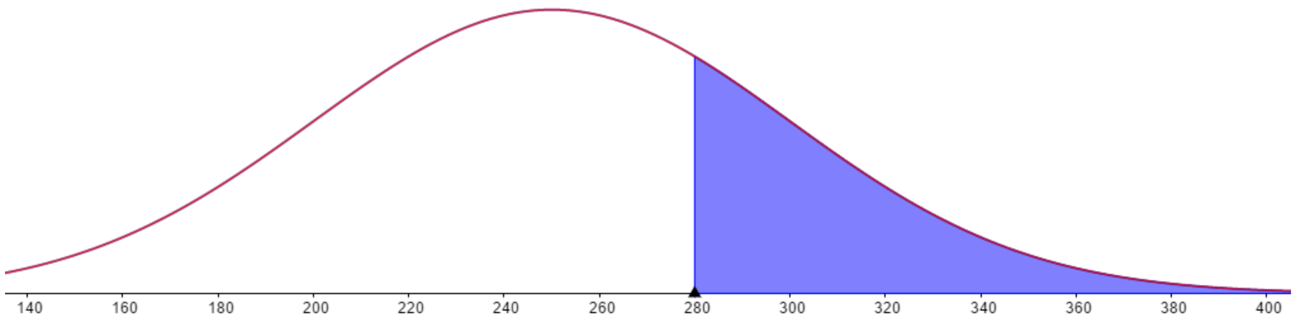
- Tipificación de la variable X : $Z = \frac{X-250}{50} \Rightarrow X = 50Z + 250$

- $P(X \geq k) = P(50Z + 250 \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-250}{50}\right) = 0{,}4$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{k-250}{50}\right) = 0{,}4 \Rightarrow P\left(Z < \frac{k-250}{50}\right) = 0{,}6$$

- Mirando en la tabla de la distribución normal, $\frac{k-250}{50} = 0{,}255 \Rightarrow k = 262{,}75$
- Por lo tanto, **el peso mínimo tiene que ser 262,75 gramos.**
-

b) Calcular $P(X \geq 280)$, $N = 6000$



- $P(X \geq 280) = P(50Z + 250 \geq 280) = P\left(Z \geq \frac{280-250}{50}\right) = P(Z \geq 0{,}6) =$

$$= 1 - P(Z < 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743 \Rightarrow \mathbf{27{,}43}\ \%$$

- El 27,43 % de 6000 $\Rightarrow 6000 \cdot 0{,}2743 = 1645{,}8$

Por lo tanto, en la piscifactoría se podrán poner a la venta aproximadamente **1646 truchas**.