eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas II

EAU 2020

www.ehu.eus

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko OHIKOA | *ORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde guztietan kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una IJnica pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = & 2 \\ x - 2y - z = & 1 \\ x + 2y + az = & 3. \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

Ejercicio B1

Sea $M(\alpha)$ la matriz dada por $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 2, 3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = (-1, -2, -3)$ y $\vec{w} = (1, 3, 5)$.

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Ejercicio B2

Sea π el plano $2x - y + Az = 0$. Sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = & -1 \\ 3x - 2y + z = & -3. \end{cases}$

Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $(0, 2)$ y tenga un extremo en $(1, -1)$. ¿Tiene f más extremos ?

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P = (0, 0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibujar la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Ejercicio B4

Calcular las integrales indefinidas I y J explicando los métodos usados para su resolución.

$$I = \int x\cos(2x)dx\,, \quad J = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 euros. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a)¿ Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 euros?

b) Si gana más de 1000 euros, ¿ cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

c) ¿ Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Ejercicio B5

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de $0,4$, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta $2,5$ puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.
7. caso de responder a mĞs preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirĞn en orden hasta llegar al nIJmero necesario.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

A.1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos que no anulan el determinante (1 punto).
- Discusión en los casos de $a = -3/2$ y $a = 3$ ($0,75$ puntos).
- Resolución para el caso $a \neq -3/2, a \neq 3$ ($0,75$ puntos).

B.1.

- Resolución correcta del apartado a) ($1,25$ puntos).
- Resolución correcta del apartado b) ($1,25$ puntos).

A.2.

- Resolución del apartado a) ($1,75$ puntos).
- Resolución del apartado b) ($0,75$ puntos).

B.2.

- Cálculo correcto de A ($1,25$ puntos).

A.3.

- Cálculo de los parámetros a, b y c $(1,75$ puntos).
- Cálculo del otro extremo relativo $(0,75$ puntos).

B.3.

- Obtención de la ecuación de las rectas que pasan por el punto $(0,0)$ y son tangentes a la parábola dada $(1,5$ puntos).
- Obtención de las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola para $a=-3$ $(0,5$ puntos) y $a=3$ $(0,5$ puntos).

A.4.

- Dibujo correcto del recinto como intersección de dos parábolas y cálculo de los puntos de corte de ambas funciones $(1,25$ puntos).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow $(1,25$ puntos).

B.4.

- Cálculo correcto de la integral I, indicando el método utilizado $(1,25$ puntos).
- Cálculo correcto de la integral J, indicando el método utilizado $(1,25$ puntos).

A.5.

- Resolución del apartado a) $(1$ punto).
- Resolución correcta del apartado b) $(0,75$ puntos).
- Resolución correcta del apartado c) $(0,75$ puntos).

B.5.

- Identificar el modelo de probabilidad $(0,5$ puntos).
- Resolución correcta del apartado a) $(1$ punto).
- Resolución correcta del apartado b) $(1$ punto).

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

SOLUCIÓN A1

El determinante del sistema es $-2(a-3).(a+3/2)$, por lo tanto, para $a \neq 3$ y $a \neq -3/2$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Para $a = 3$ y $a = -3/2$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, por lo tanto, el sistema es INCOMPATIBLE.

La solución es:

$$x = \frac{-3a+23}{-2(a-3)(a+3/2)}, \quad y = \frac{a^2+a+2}{-2(a-3)(a+3/2)}, \quad z = \frac{-8a+10}{-2(a-3).(a+3/2)}.$$

SOLUCIÓN B1

Un matriz no tiene inversa cuando el determinante de la matriz de coeficientes es cero, por tanto $|M| = 0$ cuando $a = -1$ y $a = 1$. Además, la matriz tiene inversa para $a = 0$ y es $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN A2

a) El vector normal del plano será $(-1,-2,-3) \times (1,3,5) = (-1,2,-1)$, y un punto del mismo es $(-1,2,3)$, por lo que la ecuacón del plano pedido será $-x+2y-z-2 = 0$.

b) Para que los planos sean perpendiculares, el producto escalar de sus vectores normales deberá ser cero. Por lo tanto $(-1,2.-1).(A,-1,5) = 0$, de donde $A = -7$.

SOLUCIÓN B2

Para que la recta y el plano sean paralelos, el vector director de la recta $(5,8,1)$ y el vector normal del plano $(2,-1,A)$ tienen que ser perpendiculares, por lo tanto, el producto escalar deberá ser igual a cero, luego $A = -2$. Además, la recta no est'a contenida en el plano.

El plano perpendicular a r tiene como vector normal el vector director de r, esto es $(5,8,1)$. Luego el plano perpendicular a r y que pase por el origen es $5x+8y+z = 0$.

SOLUCIÓN A3

De las condiciones impuestas se deduce que $a = 6, b = -9$ y $c = 2$. es decir, la función es $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$. Su derivada es $f'(x) = 18x^2 - 18x$, que se anula para $x = 0$ y $x = 1$. Por tanto, hay un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 1$.

SOLUCIÓN B3

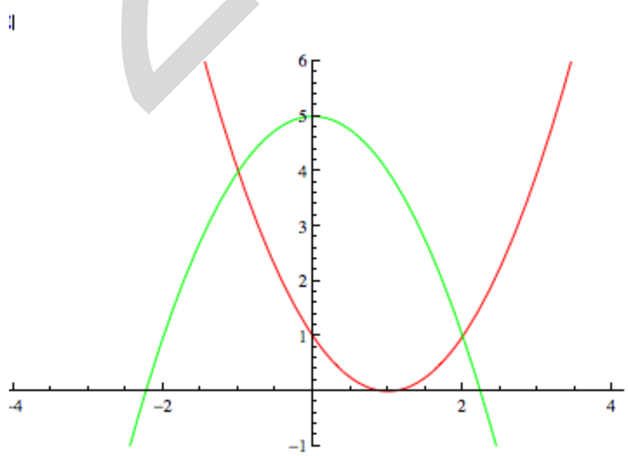
El punto genérico de la gráfica de f es $(a, a^2 + 9)$. La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y - (a2 + 9) = 2a(x - a)$.

Para que pase por el punto exterior $(0, 0)$ debe cumplirse la ecuación $-(a^2 + 9) = 2a(-a)$, o lo que es equivalente a $a^2 - 9 = 0$.

Esta ecuación tiene dos soluciones: $a = -3$ y $a = 3$. Para $a = -3$, la ecuación de la recta tangente es $y = -6x$, y para $a = 3$, la ecuación de la recta tangente es $y = 6x$.

SOLUCIÓN A4

El recinto es la zona limitada por las dos parábolas, para $x \in (-1, 2)$, ya que los puntos de corte de las dos parábolas son $(-1, 4)$ y $(2, 1)$.



El área del recinto se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$\int_{-1}^{2} [-x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 1)]dx = 9u^2.$$

SOLUCIÓN B4

La integral I se puede resolver por partes: $\int udv = uv - \int vdu$, donde $u = x$, y $dv = \cos(2x)dx$. Con este cambio resulta que $du = dx$ y $v = 1/2\sin(2x)$. Por lo tanto,

$$I = \int x \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Para el cálculo de la integral J la función se descompone en fracciones simples como sigue:

$$\frac{1}{((x+3).(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1},$$

y operando resulta que $A = -1/4$ y $B = 1/4$, por lo que la integral es

$$J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \frac{-1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C.$$

SOLUCIÓN A5

Sean los siguientes sucesos: $S =$ Estar satisfecha con el contrato, $S' =$ No estar satisfecha con el contrato, $G =$ Ganar más de 1000 euros al mes y $G' =$ No ganar más de 1000 euros al mes.

a) $P(G) = P(S).P(G/S) + P(S').P(G/S') = 0,56 + 0,06 = 0,62.$

b) $P(S/G) = (P(S).P(G/S))/(P(G)) = 0{,}56/0{,}62 == 0,903.$

c) $P(G' \cap S) = P(S).P(G'/S) = 0,14.$

SOLUCIÓN B5

a) Se trata de la distribución $B(30, 0, 4)$.

b) $P(x = 8) = \binom{30}{8}(0,4)^8(0,6)^{22} = 0,903.$

c) $n \cdot p \geq 5, n \cdot q \geq 5 \Longrightarrow N(12, 2, 68)$

$$P(10 \leq x \leq 20) = P(9,5 < x' < 20,5)$$

$$= P((9,5-12)/2,68 < z < (20,5-12)/2,68)$$

$$= P(-0,9328 < z < 3,1716) = 0,9992 - (1 - 0,8283) = 0,823.$$