

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II USE 2020

www.ehu.eus



Azterketa honek zortzi ariketa ditu. Haietako LAUri erantzun behar diezu.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketa-orrialde guztietan kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
 - pantaila grafikoa
 - datuak igortzeko aukera
 - programatzeko aukera
 - ekuazioak ebazteko aukera
 - matrize-eragiketak egiteko aukera
 - determinanteen kalkulua egiteko aukera
 - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
 - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
 - pantalla gráfica
 - posibilidad de transmitir datos
 - programable
 - resolución de ecuaciones
 - operaciones con matrices
 - cálculo de determinantes
 - derivadas e integrales
 - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2020ko OHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

A 1 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Izan bedi ekuazio matrizial hau:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \quad \text{non} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{diren.}$$

- [[0,5 puntu]]** Zer dimentsio izan behar du X matrizeak?
- [[2 puntu]]** Ebatzi ekuazio matriziala.

A 2 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Izan bedi $f(x)$ funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ ax + 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{bada} \\ \text{bada} \end{matrix}$$

- [[1 puntu]]** Aurkitu a parametroaren balioa $f(x)$ funtzioa $x = 1$ puntuan jarraitua izateko.
- [[0,5 puntu]]** Egin ezazu funtzioaren adierazpen grafikoa $a = 2$ kasuan.
- [[1 puntu]]** Kalkulatu funtzioak eta OX abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera $a = 2$ kasuan.

A 3 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Kutxa batean, bola gorri bat eta bola urdin bat daude. Kutxatik bi bola atera dira, jarraian azaltzen den eran: bola bat atera da, eta, bigarrena atera aurretik, ateratako lehenengo bola kutxara itzuli da, eta, gainera, kolore bereko beste bola bat gehitu da.

- [[0,75 puntu]]** Kalkula ezazu ateratako bigarren bola gorria izateko probabilitatea, baldin eta ateratako lehenengo bola urdina izan bada.
- [[1 puntu]]** Kalkula ezazu ateratako bigarren bola urdina izateko probabilitatea.
- [[0,75 puntu]]** Bigarren bola urdina izan bada, zer probabilitate dago ateratako lehenengo bola gorria izateko?

A 4 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Herrialde jakin bateko emakumeen altuerak 163 cm-ko batezbestekoa eta 7 cm-ko desbideratze tipikoa dituen banaketa normal bati jarraitzen dio.

- [[1,5 puntu]]** Zoriz emakume bat aukeratzen baldin bada, zer probabilitate dago haren altuera 171 cm-tik gorakoa izateko? Eta zer probabilitate dago haren altuera 155 eta 171 cm bitartekoa izateko?
- [[1 puntu]]** Mozorroak egiten dituen enpresa batek lau neurri egin nahi ditu, altueraren arabera, neurri horietako bakoitza emakumeen % 25entzat egokia izan dadin. Zein izango dira neurri batetik besterako aldaketa zehaztuko duten altuerak?

B 1 *[[gehienez 2, 5 puntu]]*

Turismo-gida batek jarduera batzuen txartelak eskuratu nahi ditu bere bezeroentzat. Hain zuzen ere, museo batera joateko 16 txartel, bisita gidatu bat egiteko 20 txartel, eta ikuskizun batera joateko 16 txartel erosi nahi ditu gutxienez.

Bi agentziak txartel horietarako eskaintzak dituzte paketetan konbinatuta:

- ◆ A agentziak museorako 6 txartel, bisita gidaturako 4 txartel eta ikuskizunerako 4 txartelez osatutako paketeak eskaintzen ditu, pakete bakoitza 210 €-an.
- ◆ B agentziak museorako 4 txartel, bisita gidaturako 6 txartel eta ikuskizunerako 4 txartelez osatutako paketeak eskaintzen ditu, pakete bakoitza 230 €-an.

Zenbat pakete erosi beharko dizkio turismo-gidak agentzia bakoitzari kostu minimoa lortzeko? Eta zenbat da kostu hori?

B 2 *[[gehienez 2, 5 puntu]]*

Izan bedi $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ funtzioa.

- a) **[[1 puntu]]** Azter itzazu funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, eta maximo eta minimo erlatiboak.
- b) **[[0, 5 puntu]]** Zehaztu funtzioaren asintota bertikalak eta horizontalak.
- c) **[[0, 5 puntu]]** Irudikatu grafikoki funtzioak eta $y = \frac{x}{2}$ zuzenak mugatutako eskualdearen azalera.
- d) **[[0, 5 puntu]]** Kalkulatu funtzioaren jatorrizko funtzioa, jakinik $x = 0$ denean 1 balioa hartzen duela.

B 3 *[[gehienez 2, 5 puntu]]*

Demagun A eta B saiakuntza aleatorio bati elkarturiko bi gertaera bateragarri direla. Jakina da $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ eta $P(A \cap B) = 0,4$ direla. Kalkulatu:

- a) **[[0, 65 puntu]]** $P(A \cup B)$
- b) **[[0, 6 puntu]]** $P(A^c \cap B^c)$
- c) **[[0, 6 puntu]]** $P(A^c \cap B)$
- d) **[[0, 65 puntu]]** $P(A|B)$

B 4 *[[gehienez 2, 5 puntu]]*

Arrain-haztegi bateko amuarrainen pisuak 250 gramoko batezbestekoa eta 50 gramoko desbideratze tipikoa dituen banaketa normal bati jarraitzen dio. Pisu jakin bat gainditzen dutenak baino ez dira salmentarako egokiak.

- a) **[[1, 25 puntu]]** Zein izan behar luke pisu horrek, arrain-haztegiko amuarrainen % 40 salmentarako egokia izatea nahi bada?
- b) **[[1, 25 puntu]]** Aipatutako pisu hori 280 gramo baldin bada eta haztegian 6000 amuarrain baldin badaude, haietatik zenbat jarri ahal izango dira salgai?



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II EBALUAZIORAKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. **Azterketa lau ariketaz osatuta dago.**
2. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
3. **Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.**
4. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek behar lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa 2,5 dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebaztitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

A.1 ariketa (2,5 puntu)

- a. **0,5 puntu.** Matrizearen dimentsioa.
- b. **2 puntu.** Ekuazioa ebaztea.
 - A matrizearen alderantzizkoaren kalkulua:
 - X matrizearen determinantearen kalkulua, **0,25 puntu.**
 - X matrizearen adjuntua, **0,5 puntu.**
 - X zehaztea, **0,5 puntu.**
 - A matrizearen iraulia, **0,25 puntu.**
 - X matrizearen kalkulua, **0,5 puntu.**

A.2 ariketa (2,5 puntu)

- a. **1 puntu.**
 - Funtzio baten puntu bateko jarraitutasuna definitzea, **0,25 puntu.**
 - Albo-limiteak, **0,5 puntu.**
 - α -ren balioaren kalkulua, **0,25 puntu.**
- b. **0,5 puntu.** Adierazpen grafikoa.
- c. **1 puntu.**
 - Eremuaren esparrua zedarritzea: $A = A_1 + A_2$ **0,25 puntu.**
 - Integralen kalkuluak, **0,25 puntu.**
 - Barrow-en erregelaren bidez azalera kalkulatzeko, **0,5 puntu.**

A.3 ariketa (2,5 puntu)

- a. **0,75 puntu.** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.
- b. **1 puntu.** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko: probabilitate osoa.
- c. **0,75 puntu.** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko: "a posteriori" probabilitatea.

A.4 ariketa (2,5 puntu)

- a. **1,5 puntu.** Probabilitate bakoitzaren kalkulua, **0,75 puntu.**
- b. **1 puntu.**
 - Problemaaren planteamendua, **0,25 puntu.**
 - Balio bakoitza kalkulatzeko, **0,25 puntu;** beraz, **0,75 puntu.**
 -

B.1 ariketa (2,5 puntu)

- Helburu-funtzioa zehaztea, **0,25 puntu.**
- Murrizketak zehaztea, **0,25 puntu.**
- Bideragarritasun- eskualdea irudikatzea, **1 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea, **0,5 puntu.**
- Funtzioak erpinetan dituen balioak kalkulatzeko, **0,25 puntu.**
- Minimoa zehaztea eta funtzioak puntu horretan duen balioa kalkulatzeko, **0,25 puntu.**



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

B.2 ariketa (2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Deribatua kalkulatzeko, **0,4 puntu.**
- Funtzioaren tarte gorakorak eta beherakorak lortzea, **0,3 puntu.**
- Maximo eta minimo erlatiboak kalkulatzeko, **0,3 puntu.**

b. 0,5 puntu.

- Asintota bertikala definitzea, **0,1 puntu.**
- Asintota horizontala zehaztea, **0,4 puntu.**

c. 0,5 puntu

- Funtzioa irudikatzea, **0,3 puntu.**
- Zuzena irudikatzea, **0,2 puntu.**

d. 0,5 puntu.

- Jatorrizkoa kalkulatzeko, **0,3 puntu.**
- Jatorrizkoaren parametroa zehaztea, **0,2 puntu.**

B.3 ariketa (2,5 puntu)

a. **0,65 puntu** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.

b. **0,6 puntu** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.

c. **0,6 puntu** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.

d. **0,65 puntu** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.

B.4 ariketa (2,5 puntu)

a. 1,25 puntu.

- Planteamendua, **0,25 puntu.**
- Aldagaiaren tipifikazioa, **0,25 puntu.**
- Balioa zehaztea tauletan, **0,5 puntu**
- Pisia kalkulatzeko, **0,25 puntu**

b. 1,25 puntu.

- Planteamendua, **0,5 puntu.**
- Probabilitatea kalkulatzeko, **0,5 puntu.**
- Kantitatea zehaztea, **0,25 puntu.**



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

EBAZPENAK

A 1 Matrize baten dimentsioa. Kalkulu matriziala. Ekuazio matriziala.

a) X matrizearen dimentsioa, hau da, $X \in \mathcal{M}_{m \times n}$

✚ $A \in \mathcal{M}_3 \Rightarrow A^t \in \mathcal{M}_3$

✚ $A^t \in \mathcal{M}_{3 \times 3} \wedge B \in \mathcal{M}_{3 \times 1} \Rightarrow A^t \cdot B \in \mathcal{M}_{3 \times 1}$

✚ $A \cdot X = A^t \cdot B \in \mathcal{M}_{3 \times 1} \Rightarrow A \cdot X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}$

○ $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3} \wedge X \in \mathcal{M}_{m \times n} \Rightarrow \exists A \cdot B \quad m = 3$

○ $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}, X \in \mathcal{M}_{3 \times n} \wedge A \cdot X \in \mathcal{M}_{3 \times 1} \Rightarrow n = 1$

} $\Rightarrow X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}$

b) $A \cdot X = A^t \cdot B$ ekuazio matrizialaren ebazpena:

✚ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$

✚ $(Adj A)^t$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

✚ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

✚ $AX = A^t \cdot B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}A^tB \Rightarrow X = A^{-1}A^tB$

✚ $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

✚ Beraz;

$X = \left[\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

A 2 Funtzio baten jarraitutasuna. Adierazpen grafikoa. Funtzioaren balioen kalkulua eta funtzioak abzisa-ardatzarekin sortzen duen esparruaren azaleraren kalkulua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ ax + 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{bada} \\ \text{bada} \end{matrix}$$

a) a ? $f(x)$ jarraitua $x = 1$ puntuan $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 2) = a + 2$

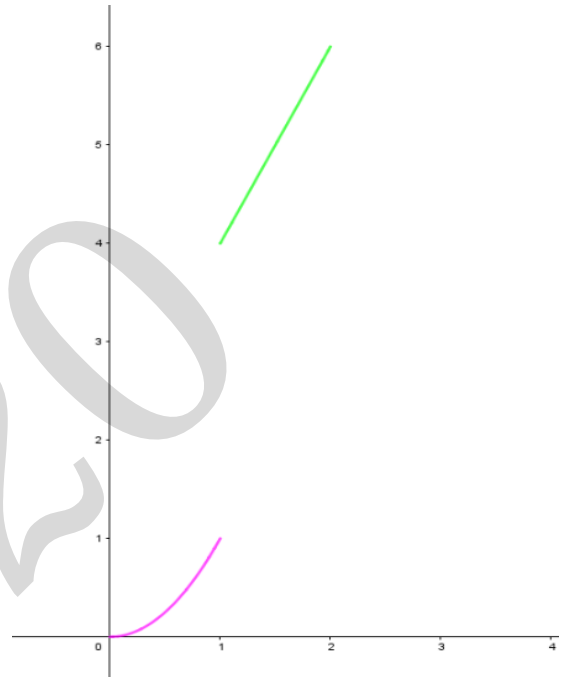
$f(1) = 1^2 = 1$

Beraz, $a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$

b) Funtzioaren irudikapen grafikoa

$a = 2$ kasuan.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{bada} \\ \text{bada} \end{matrix}$$



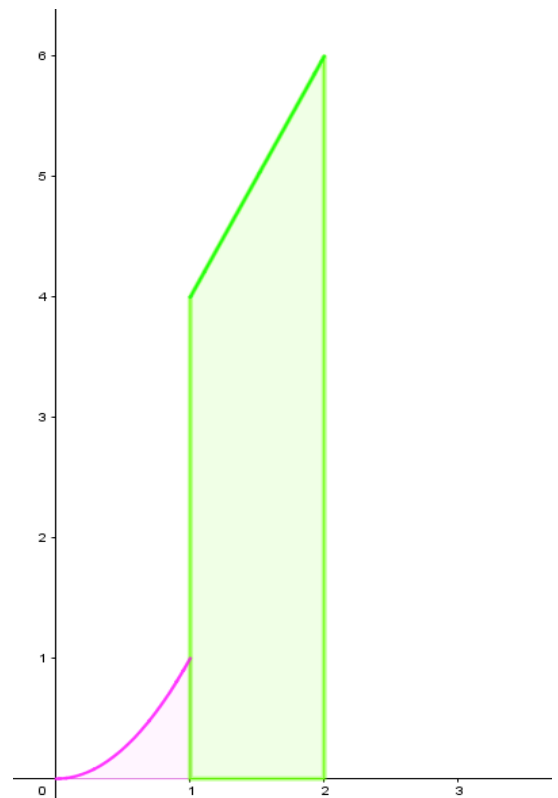
c) Funtzioak eta OX abzisa-ardatzak mugatutako esparruaren azalera.

$A = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_0^1 (x^2 - 0) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} u^2$

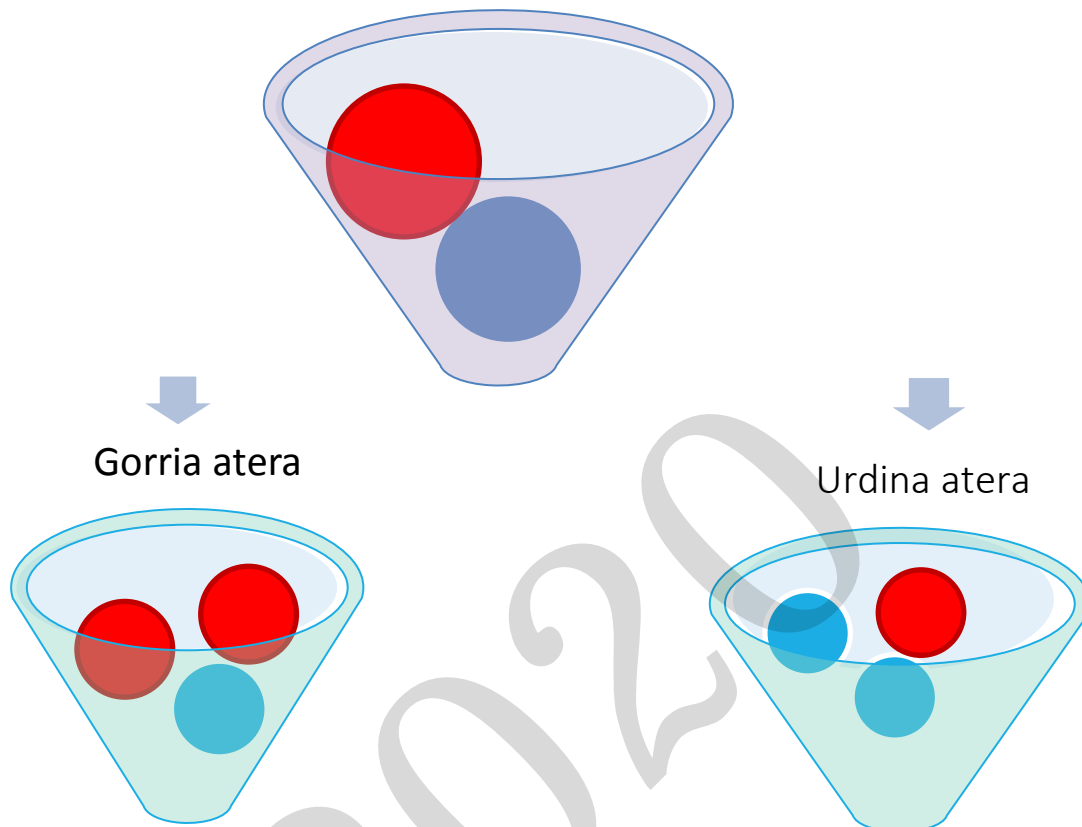
$A_2 = \int_1^2 (2x + 2 - 0) dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = [x^2 + 2x]_1^2 = (4 + 4) - (1 + 2) = 5 u^2$

Hau da: $A = \left(\frac{1}{3} + 5 \right) u^2 = \frac{16}{3} u^2$



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

A 3 Probabilitate- kalkulua; probabilitate totala eta a posteriori probabilitatea



Gertaerak;

U_1 = lehenengo bola urdina

U_2 = bigarren bola urdina

G_1 = lehenengo bola gorria

G_2 = bigarren bola gorria

- a) Bigarren ateraldian bola gorri bat ateratzeko probabilitatea lehenean bola urdin bat atera bada: $P(G_2|U_1)$

$$P(G_2|U_1) = \frac{1}{3}$$

- b) Bigarren ateraldian bola urdin bat ateratzeko probabilitatea: $P(U_2)$

$$P(U_2) = P(G_1) P(U_2|G_1) + P(U_1) P(U_2|U_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

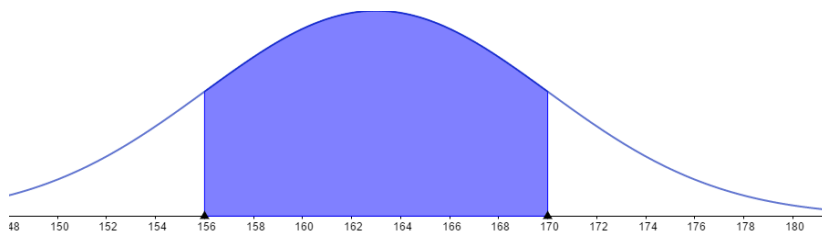
- c) Bigarren ateraldian bola urdin bat atera bada, hau da ateratako lehen bola gorria izateko probabilitatea: $P(G_1|U_2)$

$$P(G_1|U_2) = \frac{P(G_1 \cap U_2)}{P(U_2)} = \frac{P(G_1) P(U_2|G_1)}{P(U_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

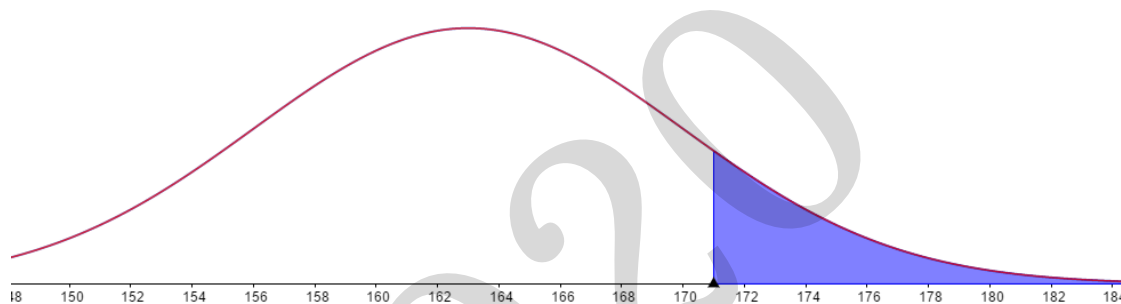
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

A 4 Banaketa normala ulertzea eta erabiltzea

a) $X \equiv \text{altuera} \sim N(\mu, \sigma) = N(163, 7)$



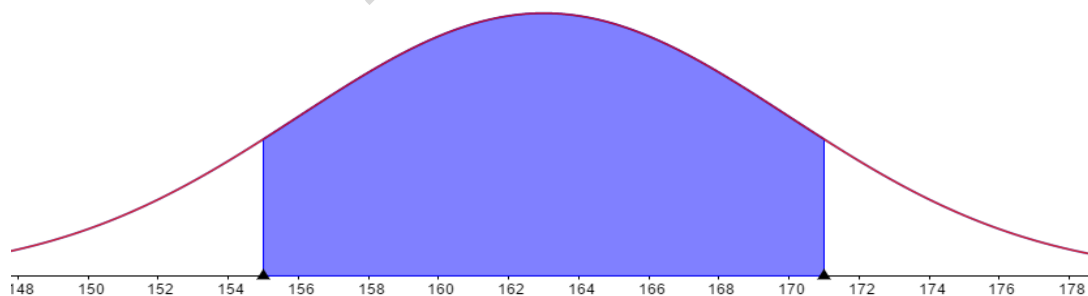
• $P(X > 171)$?



$$P(X > 171) = P\left(\frac{X - 163}{7} > \frac{171 - 163}{7}\right) = P(Z > 1,143) = 1 - P(Z \leq 1,143) =$$

$$= 1 - 0,8729 = \mathbf{0,1271}$$

• $P(155 \leq X \leq 171)$?



$$P(155 \leq X \leq 171) = P\left(\frac{155 - 163}{7} \leq \frac{X - 163}{7} \leq \frac{171 - 163}{7}\right) = P(-1,14 \leq Z \leq 1,14)$$

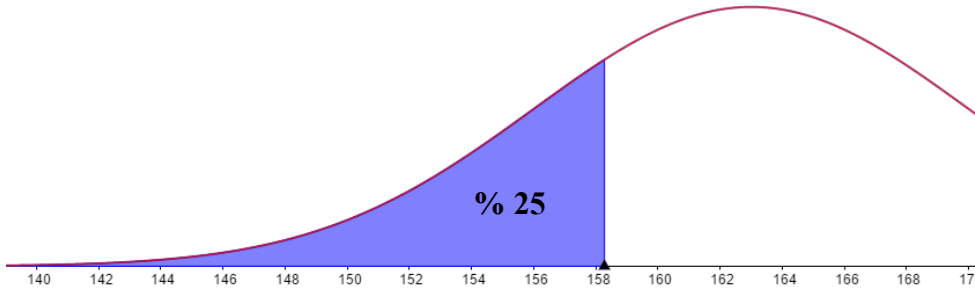
$$= 0,8729 - (1 - 0,8729) = \mathbf{0,7458}$$

b) Neurri batetik besterako aldaketa zehazten duten altueren zehazteko,

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

a, b eta c puntuak zehaztu behar dira, non: $P(X \leq a) = 0,25$, $P(X \leq b) = 0,5$ eta $P(X \leq c) = 0,75$.

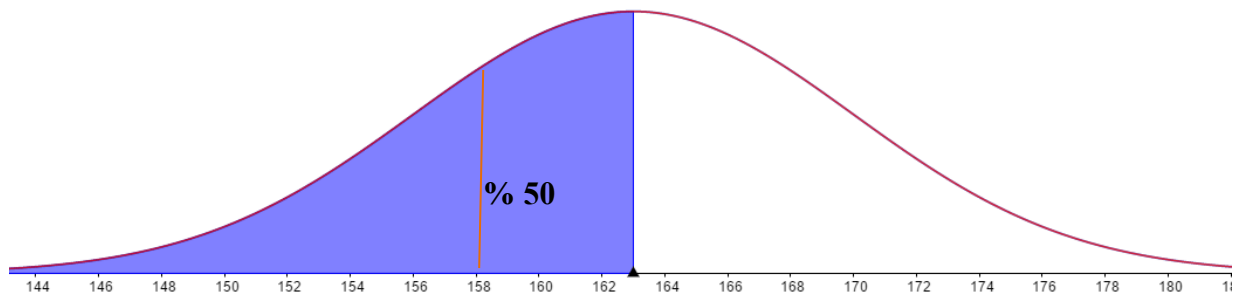
- a ? non $P(X \leq a) = 0,25$



$$P(X < a) = 0,25 \Rightarrow P\left(\frac{X - 163}{7} \leq \frac{a - 163}{7}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 163}{7}\right) = 0,25$$

$$\Rightarrow \frac{a - 163}{7} = -0,675 \Rightarrow a = 158,275$$

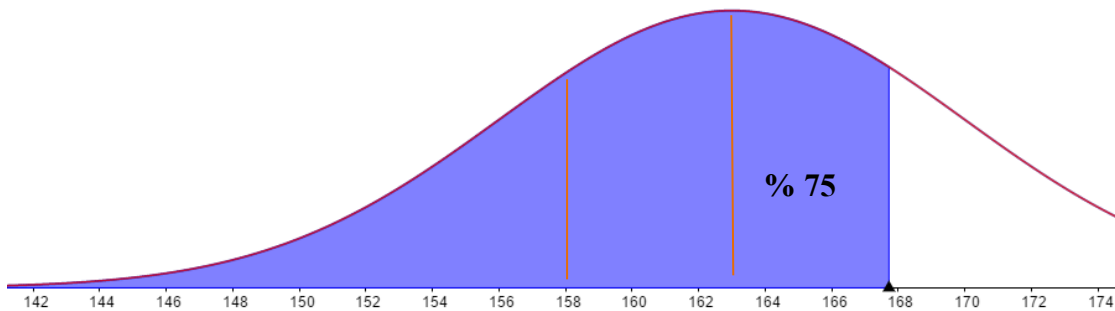
- b ? non $P(X \leq b) = 0,5$



$$P(X < b) = 0,5 \Rightarrow P\left(\frac{X - 163}{7} \leq \frac{b - 163}{7}\right) = 0,5 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{b - 163}{7}\right) = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{b - 163}{7} = 0 \Rightarrow b = 163$$

- c ? non $P(X \leq c) = 0,75$



$$P(X < c) = 0,75 \Rightarrow P\left(\frac{X - 163}{7} \leq \frac{c - 163}{7}\right) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{c - 163}{7}\right) = 0,75$$

$$\Rightarrow \frac{c - 163}{7} = 0,675 \Rightarrow c = 167,725$$



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

Beraz, neurri batetik besterako aldaketa zehazten duten altuerak **158,275 cm, 163 cm eta 167,725 cm** dira.

B 1 Bi aldagaiko programazio linealeko problemaren ebazpena:

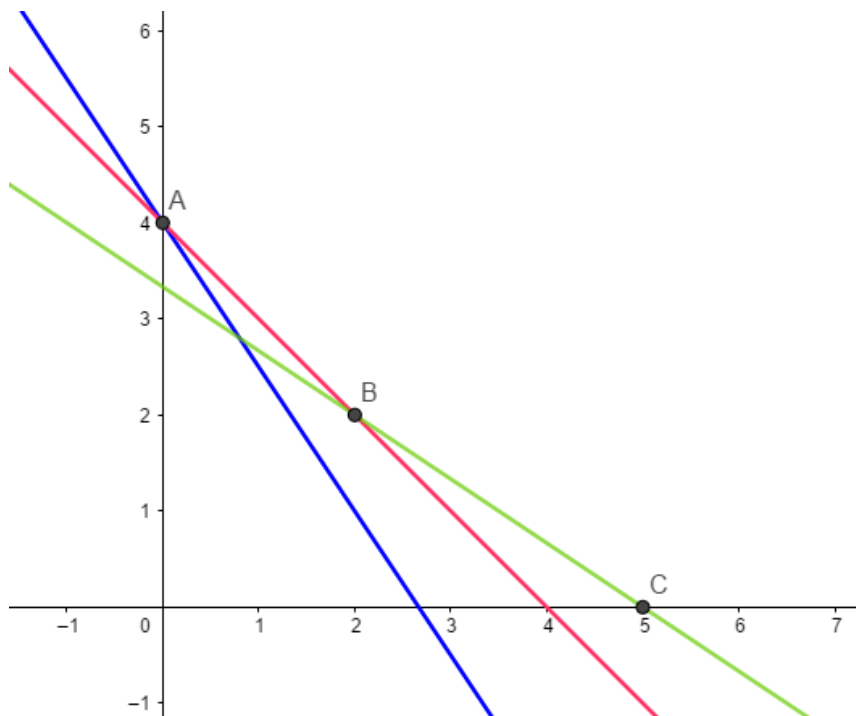
	MUSEOA	BISITA GIDATUA	IKUSKIZUNA	PREZIOA	kantitatea
A	6	4	4	210 €	x
B	4	6	4	230 €	y

✚ Helburu-funtzioa hau da:

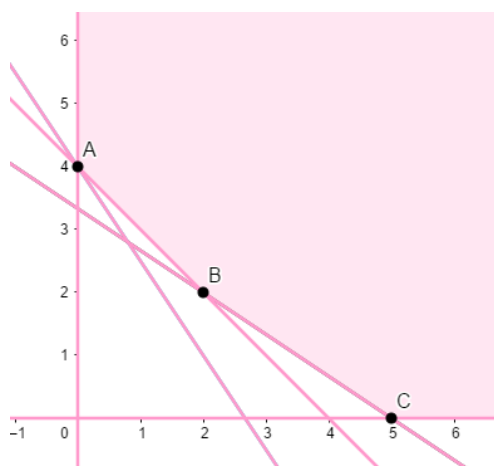
$$f(x, y) = 210x + 230y$$

✚ Murrizketak hauek dira:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \geq 16 \\ 4x + 6y \geq 20 \\ 4x + 4y \geq 16 \end{cases}$$



✚ Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



✚ Beraz, erpinak hauek dira:

$$A(0, 4), B(2, 2), C(5, 0)$$

✚ $f(A) = f(0, 4) = 920$

$f(B) = f(2, 2) = 880$

$f(C) = f(5, 0) = 1050$



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

✚ Ondorioz, funtzioaren balio minimoa $B(2, 2)$ puntuan lortzen da; beraz, turismo-gidak 2 pakete erosi behar dizkio agentzia bakoitzari kostu minimoa lortzeko, hau da, **880 euro**.



✚ **B 2** Funtzio baten ezaugarrien azterketa. Funtzio baten jatorrizko funtzioaren kalkulua.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

a) Funtzioaren hazkundea aztertuko dugu, $f'(x)$ -ren zeinuaren bidez:

✚ $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

✚ $f(x)$ gorakorra da $f'(x) > 0$ denean

$$\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow -x^2 + 1 > 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 1) < 0 \Rightarrow$$

	-1	1	
	-2	0	2
$(x + 1)$	-	+	+
$(x - 1)$	-	-	+
$(x + 1)(x - 1)$	+	-	+
$f(x)$	↓	↑	↓

Beraz, $f(x)$ $(-1, 1)$ tartean gorakorra da, eta beherakorra $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ tartean.

- Maximo eta minimo erlatiboak:

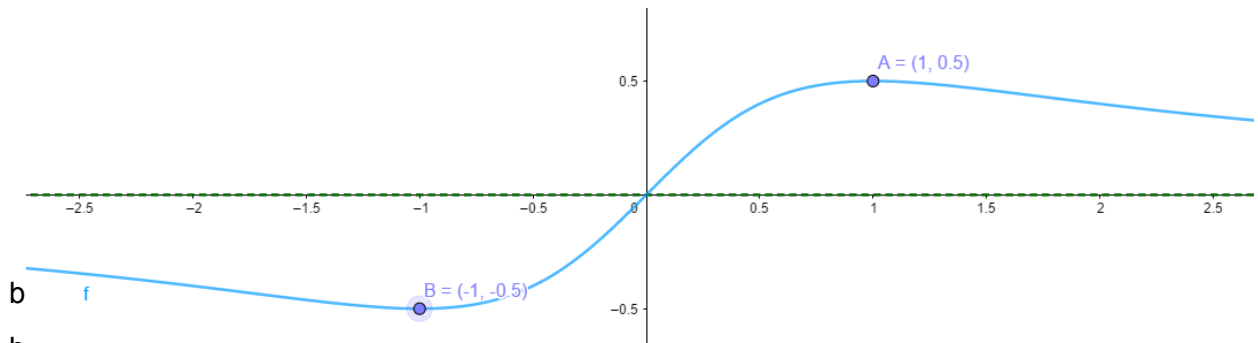
✚ $f(x)$ jarraitua da \mathbb{R} osoan, $(-\infty, -1)$ tartean beherakorra da eta $(-1, 1)$ tartean gorakorra da; beraz, funtzioak minimo erlatibo bat du $x = -1$ abzisa-puntuan.

$f(-1) = -1/2 \Rightarrow (-1, -1/2)$ **puntua minimo erlatibo bat da.**

✚ $(-1, 1)$ tartean gorakorra da, eta $(1, \infty)$ tartean beherakorra; beraz, maximo erlatibo bat du $x = 1$ puntuan.

$f(1) = 1/2 \Rightarrow (1, 1/2)$ **puntua maximo erlatibo bat da.**

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN



b) Asintota bertikalak eta horizontalak

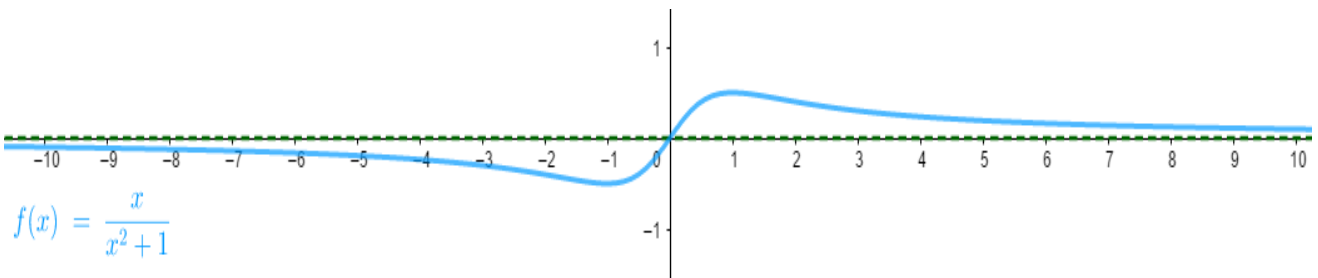
a. Asintotak bertikalak

$f(x)$ -ren definizio-eremua \mathbb{R} da; orduan, $\nexists x_0$, non $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$; beraz,

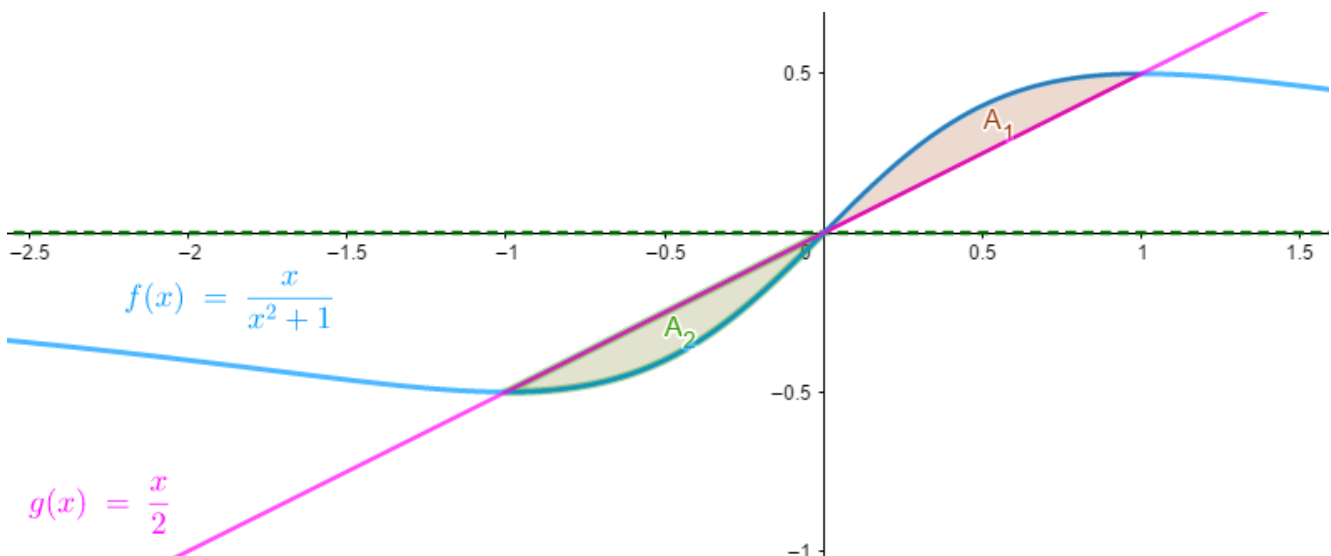
funtzioak **ez du asintota bertikalik**.

b. Asintotak horizontalak

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$; beraz, **$y = 0$ asintota horizontala da**.



c) Funtzioak eta $y = \frac{x}{2}$ zuzenak mugatutako esparruaren azalera irudikatzea:



d) $x = 0$ denean 1 balioa hartzen duen funtzioaren jatorrizko funtzioa kalkulatzeko:

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

✚ $F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx$ kalkulatu dugu:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + K$$

✚ Orduan, $F(0) = 1$ denez, $\Rightarrow \frac{1}{2} \ln 1 + K = 1 \Rightarrow K = 1$

Beraz, $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1$

B 3 Probabilitate-kalkulari buruzko ariketa

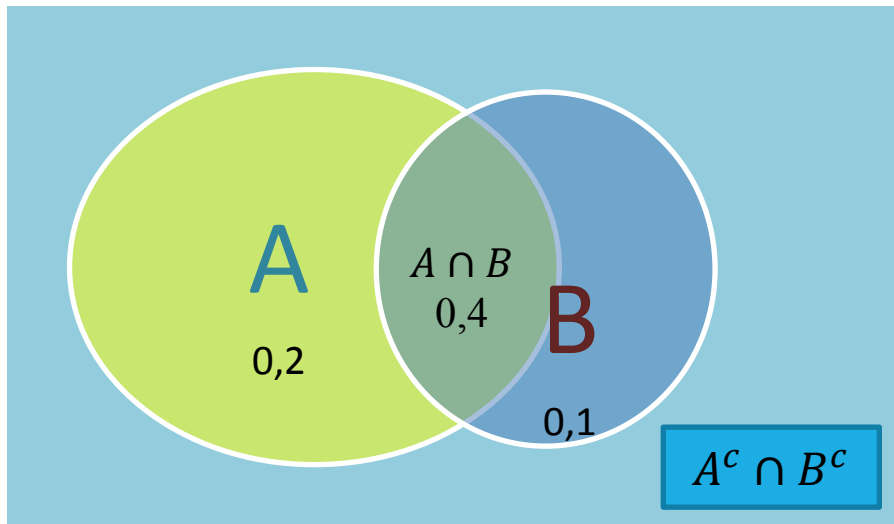
Datu ezagunak: $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cap B) = 0,4$

a) Kalkulatu: $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,4 = 0,7 \Rightarrow P(A \cup B) = 0,7$$

b) Kalkulatu: $P(A^c \cap B^c)$

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3 \Rightarrow P(A^c \cap B^c) = 0,3$$



c) Kalkulatu: $P(A^c \cap B)$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,4 = 0,1 \Rightarrow P(A^c \cap B) = 0,1$$

d) Kalkulatu: $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{0,4}{0,5} = 0,8 \Rightarrow P(A|B) = 0,8$$

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

BESTE MODU BAT:

Kontingentzia-taularen bidez:

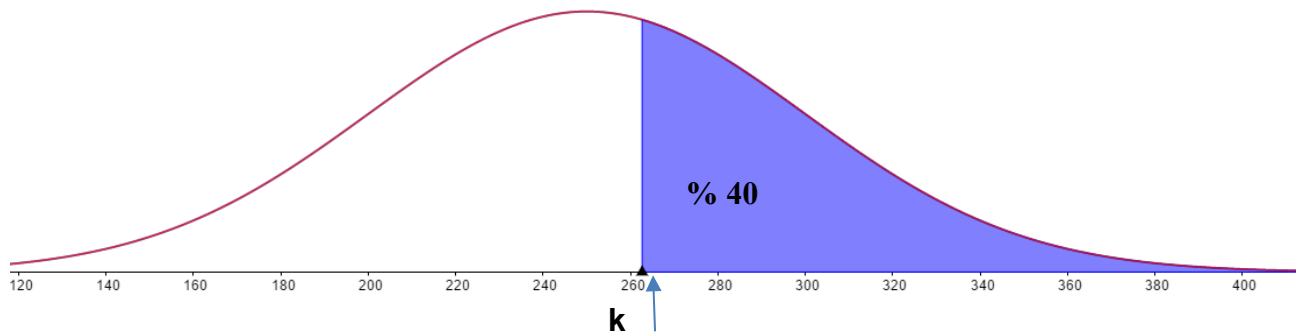
	B	B^c	
A	0,4	0,2	0,6
A^c	0,1	0,3	0,4
	0,5	0,5	1

B 4 Banaketa normala ulertzea eta erabiltzea.

$X \equiv$ amurraien pisua $\sim N(250, 50)$

a) Arrain-haztegiak amurrairen % 40 saldu ahal izateko gutxieneko pisua

✚ $k ?$ non $P(X > k) = 0,4$



✚ X aldagaiaren tipifikazioa : $Z = \frac{X-250}{50} \Rightarrow X = 50Z + 250$

✚ $P(X \geq k) = P(50Z + 250 \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-250}{50}\right) = 0,4$

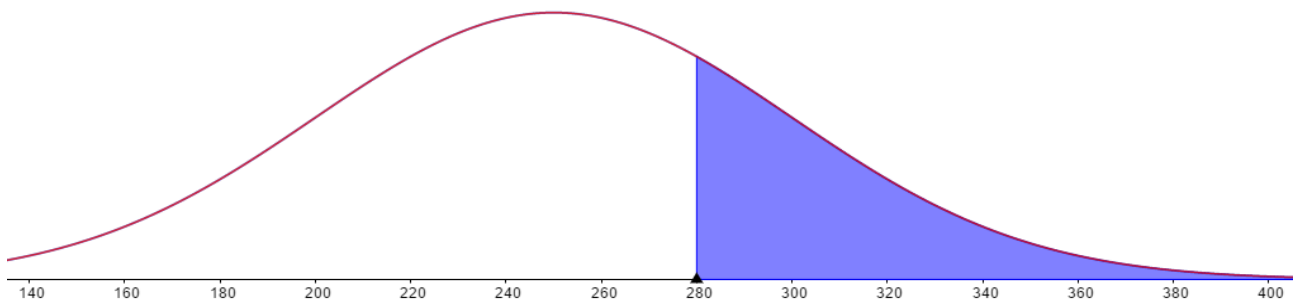
$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{k-250}{50}\right) = 0,4 \Rightarrow P\left(Z < \frac{k-250}{50}\right) = 0,6$

✚ Banaketa normalaren taulan begiratuta, $\frac{k-250}{50} = 0,255 \Rightarrow k = 262,75$

✚ Beraz, salgai jarri ahal izateko, amurrairen gutxieneko pisua **262,75 gramo** da.

b) Kalkulatu $P(X \geq 280)$, $N = 6000$

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN



$$\begin{aligned} \color{blue}{\star} P(X \geq 280) &= P(50Z + 250 \geq 280) = P\left(Z \geq \frac{280-250}{50}\right) = P(Z \geq 0,6) = \\ &= 1 - P(Z < 0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743 \Rightarrow \% \mathbf{27,43} \end{aligned}$$

$$\color{blue}{\star} 6000\text{ren } \% 27,43 \Rightarrow 6000 \cdot 0,2743 = 1645,8.$$

Beraz, arrain-haztegian **1646 amuarrain jarri ahal izango dira salgai**, gutxi gorabehera.