

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



Matematika II

USE 2020

www.ehu.eus



Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde guztietan kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una Única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000



LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Eztabaidatu ekuazio-sistema hau, a parametroaren balioen arabera:

$$S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3. \end{cases}$$

Ebatzi, ahal den kasuetan, a parametroaren arabera, Cramer-en metodoa erabiliz.

B1 Ariketa

Izan bedi $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ matrizea.

- a) Zehaztu α -ren zein balioetarako matrizeak ez duen alderantzizkorik.
- b) Kalkula ezazu, ahal bada, alderantzizko matrizea $\alpha = 0$ denean, eta ezin bada arrazoitu zergatik ez den posible.

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

- a) Kalkula ezazu $(-1, 2, 3)$ puntutik pasatzen den eta $\vec{v} = (-1, -2, -3)$ eta $\vec{w} = (1, 3, 5)$ bektoreekiko paraleloa den planoaren ekuazioa.
- b) Kalkula ezazu A -ren balioa aurreko atalean kalkulaturako plano eta $Ax - y + 5z = 8$ plano perpendikularrak izan daitezen.

B2 Ariketa

Izan bitez $\pi \equiv 2x - y + Az = 0$ plano eta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3. \end{cases}$ zuzena.

Kalkula ezazu A parametroaren balioa r eta π paraleloak izan daitezen. Bestalde, lor ezazu jatorritik pasatzen den eta r zuzenarekiko perpendikularra den plano.



HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ funtzioa. Kalkula itzazu a , b , eta c parametroen balioak funtzioaren grafika $(0, 2)$ puntutik pasa dadin eta $(1, -1)$ puntuan mutur erlatiboa eduki dezan. Ba al du f funtzioak beste mutur erlatiborik?

B3 Ariketa

Izan bitez $f(x) = x^2 + 9$ funtzioa eta $P(0, 0)$ puntua zeina f -ren grafikoarekiko kanpoko puntua baita. Aurkitu, arrazoituz, P puntutik pasatzen d(ir)en f -ren zuzen ukitzaila(k).

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Marraztu $f(x) = x^2 - 2x + 1$ eta $g(x) = -x^2 + 5$ funtzioek mugatzen duten eremu finitua eta kalkula ezazu eremu horren azalera.

B4 Ariketa

Kalkula itzazu I eta J integral mugagabeak, eta azaldu itzazu integral horiek ebazteko erabilitako metodoak:

$$I = \int x \cos(2x) dx, \quad J = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Enpresa jakin baten langileriaren %70 lan-kontratuaren baldintzekin pozik dago eta baldintzekin pozik dauden kolektiboaren barruan %80k hilean 1000 euro baino gehiago irabazten du. Pozik ez daudenen kolektiboaren barruan, %20k baino ez du hilean 1000 euro baino gehiago irabazten. Langile bat zorian aukeratzen badugu:

- a) Zein izango da hilean 1000 euro baino gehiago irabaztearen probabilitatea?



b) Demagun 1000 euro baino gehiago irabazten duela, zein izango da lan-kontratuaren baldintzekin pozik egotearen probabilitatea?

c) Zein izango da 1000 euro baino gutxiago irabazi eta lan-kontratuaren baldintzekin pozik egotearen probabilitatea?

B5 Ariketa

Garaje batean 30 aparkaleku daude. Aparkaleku bakoitzean auto bat egon daiteke ala ez, gainerako aparkalekuetan gertatzen denaren independentea izanik. Aparkalekua okupatuta egotearen probabilitatea 0,4koa bada, ondokoa eskatzen da:

- a) Probabilitate-eredu hau identifikatzea eta deskribatzea.
- b) Zer probabilitatea dago, egun batean aparkatutako auto kopurua 8 izateko?
- c) Kalkulatu zer probabilitatea dagoen egun batean, aparkatutako auto kopurua 10 eta 20 artean izateko.



MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak-kalkuluetan egindakoak eta abar- ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eske-mak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A.1.

• Matrizearen determinantea kalkulatzeko eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (puntu bat).

- $a = -3/2$ eta $a = 3$ kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu).
- $a \neq -3/2$ eta $a \neq 3$ kasuetarako ebaztea (0,75 puntu).

B.1.

- a) atala ebaztea (1,25 puntu).
- b) atala ebaztea (1,25 puntu).

A.2.

- a) atala ebaztea (1,75 puntu).
- b) atala ebaztea (0,75 puntu).



B.2.

- A -ren balioa kalkulatzeko (1,25 puntu).
- Jatorritik pasatzen den eta r zuzenarekiko plano perpendikularraren ekuazioa kalkulatzeko (1,25 puntu).

A.3.

- a , b eta c parametroen balioak kalkulatzeko (1,75 puntu).
- Beste mutur erlatiboa kalkulatzeko (0,75 puntu).

B.3.

- $(0,0)$ puntutik pasatzen den eta emandako parabolarekiko tangentea den zuzenaren ekuazioa kalkulatzeko (1,5 puntu).
- Zuzen ukitzailen ekuazioak kalkulatzeko, $a = 3$ baliorako eta $a = -3$ baliorako (0,5 puntu bakoitza).

A.4.

- Eremua ondo marraztea, bi parabolaren ebakidura modura, eta bi funtzioen ebaketa-puntueak kalkulatzeko (1,25 puntu).
- Eremuaren azalera kalkulatzeko, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).

B.4.

- I integrala zuzen kalkulatzeko, erabilitako metodoa azalduz (1,25 puntu).
- J integrala zuzen kalkulatzeko, erabilitako metodoa azalduz (1,25 puntu).

A.5.

- a) atala ebaztea (puntu bat).
- b) atala ebaztea (0,75 puntu).
- c) atala ebaztea (0,75 puntu).

B.5.

- Probabilidate-eredua identifikatzeko (0,5 puntu).
- a) atala ebaztea (puntu bat).
- b) atala ebaztea (puntu bat).



ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Sistemaren determinantea $-2(a-3).(a+3/2)$ da; beraz, $a \neq 3$ eta $a \neq -3/2$ direnean, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$a = 3$ eta $a = -3/2$ direnean, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta matrize hedatuarena 3, beraz sistema BATERAEZINA DA.

$a \neq 3$ eta $a \neq -3/2$ direnean, sistemaren soluzioa honako hau da:

$$x = \frac{-3a + 23}{-2(a-3)(a+3/2)}, \quad y = \frac{a^2 + a + 2}{-2(a-3)(a+3/2)}, \quad z = \frac{-8a + 10}{-2(a-3).(a+3/2)}.$$

B1 EBAZPENA

Kontuan izanik matrize baten alderantzizkoa ez dela existitzen matrizearen determinantea zero denean, $|M| = 0$ izango da $a = -1$ eta $a = 1$ direnean. Gainera M

matrizeak alderantzizkoa du $a = 0$ denean, eta hau da: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A2 EBAZPENA

- Planoaren bektore normala $(-1, -2, -3) \times (1, 3, 5) = (-1, 2, -1)$ da, eta plano horren puntu bat $(-1, 2, 3)$ izanik, eskatutako planoaren ekuazioa hau izango da: $-x + 2y - z - 2 = 0$.
- Planoak perpendikularrak izan daitezen, haien bektore normalen biderkadura eskarrarrak zero izan behar du: $(-1, 2, -1).(A, -1, 5) = 0$, beraz $A = -7$.

B2 EBAZPENA

Planoa eta zuzena paraleloak izan daitezen, zuzenaren bektore gidatzaileak, $(5, 8, 1)$, eta planoaren bektore normalak $(2, -1, A)$ perpendikularrak izan behar dute, hau da, haien biderkadura eskalarrak zero izan behar du. Beraz, $A = -2$ da. Gainera, zuzena ez dago planoan.

r zuzenarekiko plano perpendikularren bektore normala, zuzen horren bektore gidatzailea da, hau da $(5, 8, 1)$. Beraz jatorritik pasatzen den eta r -rekiko perpendikularra den planoaren ekuazioa $5x + 8y + z = 0$ da.

A3 EBAZPENA

Emandako baldintzetatik ondorioztatzen da $a = 6, b = -9$ eta $c = 2$ direla; orduan, funtzioa $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$ da. Haren deribatua $f'(x) = 18x^2 - 18x$ da, eta anulatu egiten dena $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan. Beraz, maximo bat dago $x = 0$ denean eta minimo bat $x = 1$ denean.

B3 EBAZPENA

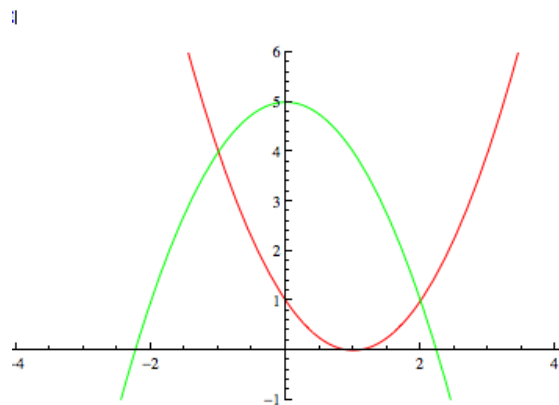
Funtzioaren grafikoaren edozein puntu $(a, a^2 + 9)$ da. Puntu horretan, funtzioaren zuzen ukitzaillearen ekuazioa $y - (a^2 + 9) = 2a(x - a)$ da.

$(0, 0)$ kanpoko puntutik pasatuko bada, $-(a^2 + 9) = 2a(-a)$ ekuazioa bete behar da, hau da, $a^2 - 9 = 0$.

Ekuazio horrek bi soluzio ditu $a = -3$ eta $a = 3$. Eta $a = -3$ -rako, zuzen ukitzaillearen ekuazioa $y = -6x$ da, eta $a = 3$ -rako zuzen ukitzaillearen ekuazioa $y = 6x$ da.

A4 EBAZPENA

Eskatutako eskualdea bi parabolek mugatzen duten eremua da, $x \in (-1, 2)$ tartean izanik, bi parabolen ebaki puntuak $(-1, 4)$ eta $(2, 1)$ baitira.



Eremuaren azalera honako integral honen bidez kalkulatzen da:

$$\int_{-1}^2 [-x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 1)] dx = 9u^2.$$



B4 EBAZPENA

I integrala kalkulatzeko zatikako integrazioa erabil daiteke: $\int u dv = uv - \int v du$, non $u = x$, eta $dv = \cos(2x)dx$ diren. Aldagai-aldaketa horrekin $du = dx$ da eta $v = 1/2 \sin(2x)$. Beraz,

$$I = \int x \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

J integrala kalkulatzeko, funtzioa frakzio sinpletan deskoposatu behar da:

$$\frac{1}{((x+3).(x-1))} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1},$$

eta, eragiketak eginez $A = -1/4$ eta $B = 1/4$ balioak lortzen dira. Beraz:

$$J = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-1}{4} \ln|x+3| + \frac{1}{4} \ln|x-1| + C.$$

A5 EBAZPENA

Izan bitez honako gertaera hauek: S = Lan-kontratuaren baldintzekin pozik egotea, S' = Lan-kontratuaren baldintzekin pozik ez egotea, G = Hilean 1000 euro baino gehiago irabaztea, eta G' = Hilean 1000 euro baino gehiago ez irabaztea.

a) $P(G) = P(S).P(G/S) + P(S').P(G/S') = 0,56 + 0,06 = 0,62.$

b) $P(S/G) = (P(S).P(G/S))/(P(G)) = 0,56/0,62 = 0,903.$

c) $P(G' \cap S) = P(S).P(G'/S) = 0,14.$

B5 EBAZPENA

a) Banaketa $B(30, 0,4)$ da.

b) $P(x = 8) = \binom{30}{8}(0,4)^8(0,6)^{22} = 0,903.$

c) $n \cdot p \geq 5, n \cdot q \geq 5 \implies N(12, 2, 68)$

$$\begin{aligned} P(10 \leq x \leq 20) &= P(9,5 < x' < 20,5) \\ &= P((9,5 - 12)/2,68 < z < (20,5 - 12)/2,68) \\ &= P(-0,9328 < z < 3,1716) = 0,9992 - (1 - 0,8283) = 0,823. \end{aligned}$$