

eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# Matemáticas II

## EAU 2020

[www.ehu.es](http://www.ehu.es)



***Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.***

***Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.***

***Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

***Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una Única pregunta.***

***En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.***

***No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.





**PRIMERA PARTE (2,5 puntos).** Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

**Ejercicio A1**

Discutir, en función de  $A$ , el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S = \begin{cases} x + y + z = 2A, \\ 2x + 3y + 4z = 2, \\ 4x + 4y + Az = 4A. \end{cases}$$

**Ejercicio B1**

Dada la matriz  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , calcular razonadamente  $M^{2020}$ .

**SEGUNDA PARTE (2,5 puntos).** Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

**Ejercicio A2**

Dada la recta

$$r = \begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1, \end{cases} \text{ y el plano } \pi = 3x + (\alpha + 1)(y + 1) + \alpha z = 1,$$

- a) hallar  $a$  para que la recta y el plano sean paralelos,
- b) determinar si el punto  $P = (1, 1, 2)$  pertenece al plano hallado en a).

**Ejercicio B2**

Hallar el punto  $Q$ , simétrico de  $P = (1, 2, 3)$  respecto al plano de ecuación:  $x + y + z = 0$ , explicando los pasos seguidos para su cálculo.



**TERCERA PARTE (2,5 puntos).** Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

**Ejercicio A3**

Sea  $f$  la función definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x, & x \leq 2, \\ x^2 - bx - 4, & x > 2. \end{cases}$$

Calcular  $a$  y  $b$  razonadamente, sabiendo que  $f$  es derivable en toda la recta real.

**Ejercicio B3**

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = x^2 e^{2x}$ . Encontrar sus extremos.

**CUARTA PARTE (2,5 puntos).** Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

**Ejercicio A4**

Representar la región finita del plano limitada por la curva  $y = 3 - x^2$  y por la recta  $y = 2x$ . Calcular su área.

**Ejercicio B4**

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral

$$\int x \cos(3x) dx.$$

**QUINTA PARTE (2,5 puntos).** Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

**Ejercicio A5**

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal  $N(10; 0, 1)$ . Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,8 y 10,1. Calcular:

- a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.
- b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?



### **Ejercicio B5**

En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

- a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?
- b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?



## MATEMATIKA II

### EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak -kalkuluetan egindakoak eta abar- ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eske-mak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

### Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

#### A AUKERA

##### A.1.

- Matrizaren determinantea kalkulatzeko eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (Puntu bat).
- $A = 4$  kasua eztabaidatzea (0,75 puntu).
- $A \neq 4$  kasua eztabaidatzea (0,75 puntu).

##### B.1.

- $M$ -ren ondoz ondoko berreturak kalkulatzeko (1,25 puntu).
- $M^{2020}$  kalkulatzeko, erantzuna arrazoituz (1,25 puntu).

##### A.2.

- Problema planteatzea, zuzenaren bektore zuzentzailea eta planoaren bektore normala lortzea (Puntu bat).
- $a$ -ren balioa lortzea (0,75 puntu).
- Egiaztatzea  $P$  puntua ez dagoela emandako planoan (0,75 puntu).



## B.2.

- Problema planteatzea, planoarekiko perpendikularra den eta  $P$  barne duen zuzena kalkulatzeko (Puntu bat).
- Planoaren eta aurreko atalean aurkitutako zuzenaren arteko ebakidura kalkulatzeko (0,75 puntu).
- Planoarekiko  $P$ -ren simetrikoa den  $Q$  puntua kalkulatzeko (0,75 puntu).

## A.3.

- $x = 2$  puntuan  $f$  jarraitua izateko baldintzak ezartzea (Puntu bat).
- $x = 2$  puntuan  $f$  deribagarria izateko baldintzak ezartzea (Puntu bat).
- $a$  eta  $b$  parametroen balioak lortzea (0,5 puntu).

## B.3.

- Funtzioaren lehen deribatua kalkulatzeko (0,75 puntu).
- Funtzioaren tarte gorakorak eta beherakorak kalkulatzeko (0,75 puntu).
- Funtzioaren maximoa kalkulatzeko (0,5 puntu).
- Funtzioaren minimoa kalkulatzeko (0,5 puntu).

## A.4.

- Eremua ondo marraztea parabolaren eta zuzenaren ebakidura modura, eta bi funtzioen ebaketa-puntuak kalkulatzeko (1,25 puntu).
- Eremuaren azalera kalkulatzeko, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).

## B.4.

- Zatikako integrazio-metodoa azaltzea (0,75 puntu).
- $J$  integrala zuzen kalkulatzeko, azaldutako metodoa erabiliz (1,75 puntu).

## A.5.

- Ariketaren planteamendu egokia egitea (0,5 puntu).
- a) atala zuzen ebaztea (Puntu bat).
- b) atala zuzen ebaztea (Puntu bat).





### B.5.

- a) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- c) atala zuzen ebaztea (0,75 puntu).
- d) atala zuzen ebaztea (0,75 puntu).

## MATEMÁTICAS II

### CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2,5 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

### Criterios particulares de cada uno de los problemas

#### A.1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos que no anulan el determinante (1 punto).
- Discusión para el caso de  $A = 4$  (0,75 puntos).
- Discusión para el caso de  $A \neq 4$  (0,75 puntos).

#### B.1.

- Cálculo de las potencias sucesivas de  $M$  (1,25 puntos).
- Cálculo razonado de  $M^{2020}$  (1,25 puntos).



## A.2.

- Planteamiento del problema, obtención del vector director de la recta y el vector normal del plano (1 punto).
- Obtención del valor de  $a$  (0,75 puntos).
- Verificar que el punto  $P$  no pertenece al plano dado (0,75 puntos).

## B.2.

- Planteamiento del problema, cálculo de la ecuación de la recta perpendicular al plano y que contiene a  $P$  (1 punto).
- Cálculo del punto de intersección del plano y la recta hallada en el apartado anterior (0,75 puntos).
- Cálculo del punto simétrico a  $P$  (0,75 puntos). (1 punto).

## A.3.

- Establecer las condiciones para que  $f$  sea continua en  $x = 2$  (1 punto).
- Establecer las condiciones para que  $f$  sea derivable en  $x = 2$  (1 punto).
- Cálculo correcto de los valores de  $a$  y  $b$  (0,5 puntos).

## B.3.

- Cálculo correcto de la primera derivada (0,75 puntos).
- Cálculo correcto de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (0,75 puntos).
- Cálculo correcto del máximo (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del mínimo (0,5 puntos).

## A.4.

- Dibujo correcto del recinto como intersección de la parábola y la recta, y cálculo de los puntos de corte de ambas funciones (1,25 puntos).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1,25 puntos).

## B.4.

- Explicar en qué consiste el método de la integración por partes (0,75 puntos).
- Cálculo correcto de la integral  $J$ , utilizando el método anterior. (1,75 puntos).



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA  
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

**ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK  
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN**

**A.5.**

- Planteamiento correcto del ejercicio (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado a) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado b) (1 punto).

**B.5.**

- Resolución correcta del apartado a) (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado b) (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado c) (0,75 puntos).
- Resolución correcta del apartado d) (0,75 puntos).



## RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

### SOLUCIÓN A1

El determinante del sistema es  $A - 4$ , por lo tanto,  $A = 4$ . Para  $A \neq 4$  el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Para  $A = 4$  el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es INCOMPATIBLE.

La solución es:

$$x = \frac{-6A^2 - 30A + 8}{A - 4}, \quad y = \frac{-4A^2 + 26A - 8}{A - 4}, \quad z = \frac{-4A}{A - 4}.$$

### SOLUCIÓN B1

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto}$$

$$M^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}.$$

### SOLUCIÓN A2

El vector director de la recta  $r$  es  $(5, -14, 1)$ . El vector normal del plano  $\pi$  es  $(3, a + 1, a)$ . Para que se cumpla lo pedido ambos vectores deberán ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser cero. Por lo tanto  $0 = (5, -14, 1) \cdot (3, a + 1, a)$ , de donde  $1 - 13a = 0$ , luego  $a = 1/13$ .

Para que  $P$  pertenezca al plano tiene que cumplir la condición  $3x + (1/13 + 1)(y + 1) + 1/13z = 1$ , por lo tanto,  $P$  no pertenece al plano  $\pi$ .



## SOLUCIÓN B2

Se calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto  $P(1, 2, 3)$ . El vector director de la recta es el vector normal al plano, esto es, el

$$(1, 1, 1) \text{ luego la ecuación de la recta buscada es } \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Posteriormente se calcula el punto de intersección del plano dado con esta recta, obteniendo el punto  $P'(-1, 0, 1)$ . Finalmente, se calcula el punto simétrico  $Q(-3, -2, -1)$ .

## SOLUCIÓN A3

La función deberá ser continua y derivable en  $x = 2$ . Para que sea continua tiene que cumplir la condición  $2a + b = -3$  y para que sea derivable tiene que cumplir que  $4a + b = 1$ . Por tanto para que  $f$  sea derivable en toda la recta real  $a = 2$  y

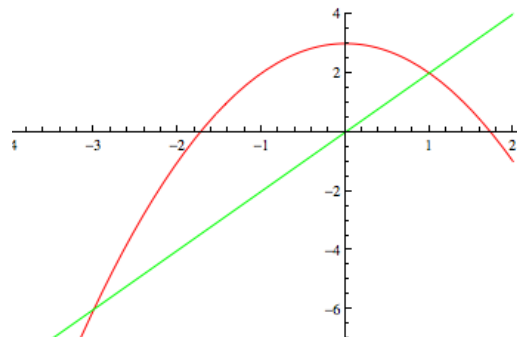
$$b = -7, \text{ esto es: } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x, & x \leq 2, \\ x^2 + 7x - 4, & x > 2. \end{cases}$$

## SOLUCIÓN B3

Dada la función  $f(x) = x^2 e^{2x}$ , su derivada es  $f'(x) = 2x e^{2x} (1 + x)$ , que se anula en  $x = 0$  y  $x = -1$ . La función es creciente en  $(-\infty, -1)$  y en  $(0, \infty)$ , y es decreciente en  $(-1, 0)$ . Tiene un máximo en  $(-1, 1/e^2)$  y un mínimo en  $(0, 0)$ .

## SOLUCIÓN A4

El recinto es la zona finita del plano limitada por la parábola y la recta para  $x \in (-3, 1)$ , ya que los puntos de corte de la parábola y la recta son  $(-3, -6)$  y  $(1, 2)$ .





El área del recinto se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$\int_{-3}^1 (3 - x^2 - 2x) dx = \frac{32}{3} u^2.$$

### SOLUCIÓN B4

La integral se puede resolver por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$ , donde  $u = x$ , y  $dv = \cos(3x) dx$ . Con este cambio resulta que  $du = dx$  y  $v = 1/3 \sin(3x)$ . Por lo tanto,

$$\int x \cos 3x dx = \frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + C.$$

### SOLUCIÓN A5

a)  $P(9,8 < x < 10,1) = P((9,8 - 10)/0,1 < z < (10,1 - 10)/0,1) = P(-2 < z < 1) = 0,8413 - (1 - 0,9772) = 0,8185.$

Probabilidad de ser considerado defectuoso:  $1 - 0,8185 = 0,1815.$

b)  $0,1815 \cdot 1500 = 272,25$ , es decir, 273 envases.

### SOLUCIÓN B5

Sean los siguientes sucesos:  $C =$  Tener cabello castaño,  $C' =$  No Tener cabello castaño,  $A =$  Tener los ojos azules y  $A' =$  No Tener los ojos azules.

a)  $P(A/C) = 15/40.$

b)  $P(C'/A) = 20/35.$

c)  $P(C' \cap A') = 40/100.$

d)  $P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = 40/100 + 35/100 - 15/100 = 60/100 = 0,6.$