

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



Gizarte Zientzietan Aplikatuak Matematika II USE 2020

www.ehu.es

Azterketa honek zortzi ariketa ditu. Haietako LAUri erantzun behar diezu.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketa-orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
 - pantaila grafikoa
 - datuak igortzeko aukera
 - programatzeko aukera
 - ekuazioak ebazteko aukera
 - matrize-eragiketak egiteko aukera
 - determinanteen kalkulua egiteko aukera
 - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
 - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
 - pantalla gráfica
 - posibilidad de transmitir datos
 - programable
 - resolución de ecuaciones
 - operaciones con matrices
 - cálculo de determinantes
 - derivadas e integrales
 - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.

A 1 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Zehaztu ezazu $F(x, y) = 5x + 4y$ helburu-funtzioaren balio maximoa, jakinda honako desberdintza hauek murrizten dutela:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

A 2 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Izan bedi $f(x) = ax^3 + bx + 1$ funtzioa.

- [[0,75 puntu]]** Kalkula itzazu a eta b parametroen balioak funtzioak $(1, -5)$ puntuan mutur erlatibo bat izan dezan.
- [[0,75 puntu]]** Aztertu $f(x)$ funtzioaren minimo eta maximo erlatiboak, eta inflexio-puntuak, $a = 2$ eta $b = -6$ direnean.
- [[1 puntu]]** Kalkulatu funtzioak eta $y = 2x + 1$ zuzenak mugatutako eskualdearen azalera, $a = 2$ eta $b = -6$ kasuan. Egin ezazu irudikapen grafikoa.

A 3 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Institutu batean matrikulaturiko ikasle guztietatik % 90 ikastetxea dagoen herrian jaiotakoak dira. Institutuko ikasleen % 42 mutilak dira, eta ikasleen % 54 institutua dagoen herrian jaiotako neskek dira.

- [[1 puntu]]** Ikasle bat zoriz aukeratuta, zein da institutua dagoen herrian jaioa ez izateko probabilitatea?
- [[0,75 puntu]]** Eta neska izateko eta institutua dagoen herrian jaioa ez izateko probabilitatea?
- [[0,75 puntu]]** Ikasle bat zoriz aukeratu da, eta suertatu da institutua dagoen herrian jaiotakoa izatea. Zein da mutila izateko probabilitatea?

A 4 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Talde jakin bateko ikasleek irakasgai batean lortutako emaitzek 6,2ko batezbestekoa eta 2ko desbideratze tipikoa dituen banaketa normal bati jarraitzen diote.

Zoriz ikasle bat aukeratzeko da, kalkula ezazu:

- [[1 puntu]]** Haren nota 7tik gorakoa izateko probabilitatea.
- [[0,75 puntu]]** Haren nota 5 eta 8 bitartekoa izateko probabilitatea.
- [[0,75 puntu]]** Notarik oneneko ikasleen % 25ek "bikain" kalifikazioa lortu bazuten, zein da gutxieneko nota kalifikazio hori lortzeko?

B 1 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizeak.

- [[1,25 puntu]]** Kalkula ezazu $(A \cdot A^t)$ matrizearen alderantzizkoa.
- [[0,75 puntu]]** Ba al du $(A^t \cdot A)$ matrizeak alderantzizkorik?
- [[0,5 puntu]]** Kalkula itzazu, posible denean:

$$A \cdot B \quad \text{eta} \quad A^t \cdot B$$

B 2 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

- [[0,5 puntu]]** Azter itzazu $y = 4 - x^2$ funtzioaren tarte gorakorak eta beherakorak, eta maximo eta minimo erlatiboak.
- [[0,75 puntu]]** Adierazi grafikoki honela definitutako funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{baldin eta} & -2 \leq x < 0 & \text{bada} \\ 4 - x & \text{baldin eta} & 0 \leq x \leq 4 & \text{bada} \end{cases}$$

- [[1,25 puntu]]** Kalkulatu $f(x)$ funtzioaren grafikoak eta abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera.

B 3 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Estatu Batuetako ikastetxe batean 1000 ikasle eta 100 irakasle daude. Irakasleen % 10 demokratak dira, eta gainerakoak errepublikanoak. Ikasleei dagokienez, proportzioak justu kontrakoak dira, hau da, ikasleen artean % 10 errepublikanoak dira, eta gainerakoak demokratak dira.

- [[1,5 puntu]]** Lagun bat zoriz aukeratzen baldin bada, zein da errepublikanoa izateko probabilitatea?
- [[1 puntu]]** Ikastetxeko pertsona bat zoriz aukeratu da, eta errepublikanoa dela suertatu da. Zein da ikaslea izateko probabilitatea?

B 4 *[[gehienez 2,5 puntu]]*

Talde bateko ikasleek irakasgai jakin bateko azterketa amaitzeko behar duten denborak 60 minutuko batezbestekoa eta 10 minutuko desbideratze tipikoa dituen banaketa normal bati jarraitzen dio.

- [[1 puntu]]** Azterketa egiteko 75 minutu ematen badira, ikasleen zer proportziok lortuko du azterketa amaitzea?
- [[0,75 puntu]]** Azterketa egiteko 80 minutu ematen badira, ikasleen zer proportziok ez du lortuko azterketa amaitzea?
- [[0,75 puntu]]** Zenbat denbora eman behar da azterketa hori egiteko, ikasleen % 96k amaitzea nahi bada?



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUAZIORAKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. **Azterketa lau ariketaz osatuta dago.**
2. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
3. **Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.**
4. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.
5. **Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.**

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek behar lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa 2,5 dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebaztitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzean dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.

2020



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

A 1 ariketa (2,5 puntu)

- Murrizketen irudikapena **0,25 puntu**.
- Bideragarritasun-eskualdea zehaztea, **0,75 puntu**.
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea, **0,75 puntu**.
- Funtzioa erpinetan baloratzea, **0,5 puntu**.
- Funtzioaren maximoa zehaztea **0,25 puntu**.

A 2 ariketa (2,5 puntu)

- a. **0,75 puntu**.
 - **0,25 puntu**, (1, - 5) funtzioaren puntu bat da.
 - **0,25 puntu**, (1, - 5) puntuan funtzioak mutur erlatibo bat du.
 - **0,25 puntu**, sistema ebaztea.
- b. **0,75 puntu**.
 - Maximo eta minimo erlatiboak kalkulatzeko, **0,5 puntu**.
 - Inflexio-puntuak lortzea, **0,25 puntu**.
- c. **1 puntu**.
 - Irudikapen grafikoa, **0,25 puntu**.
 - Azalera zehaztea $A = A_1 + A_2$ **0,25 puntu**.
 - Integrala kalkulatzeko, **0,25 puntu**.
 - Barrow-en erregela aplikatuz, azalera kalkulatzeko, **0,25 puntu**.

A 3 ariketa (2,5 puntu)

- a. **1 puntu**.
 - Kontingentzia-taula egitea, **0,25 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko, **0,75 puntu**.
- b. **0,75 puntu**. Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.
- c. **0,75 puntu**. Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.

A 4 ariketa (2,5 puntu)

- a. **1 puntu**.
 - Planteamendua, **0,25 puntu**.
 - Aldagaiaren tipifikazioa, **0,25 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko, **0,5 puntu**.
- b. **0,75 puntu**. Eskatutako probabilitatearen kalkulua.
- c. **0,75 puntu**. Parametroa zehaztea.

B 1 ariketa (2,5 puntu)

- a. **1,25 puntu**.
 - $(A \cdot A^t)$ zehaztea, **0,25 puntu**.
 - $(A \cdot A^t)$ matrizearen determinantea kalkulatzeko, **0,25 puntu**.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

- $(A \cdot A^t)$ matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko, **0,75 puntu**.
- b. 0,75 puntu.**
 - $(A^t \cdot A)$ zehaztea **0,25 puntu**.
 - $(A^t \cdot A)$ matrizearen determinantea kalkulatzeko, **0,25 puntu**.
 - Azalpena, **0,25 puntu**.
- c. 0,5 puntu.**
 - $A \cdot B$ azalpena **0,25 puntu**.
 - $A^t \cdot B$ kalkulatzeko **0,25 puntu**.

B 2 ariketa (2,5 puntu)

- a. 0,5 puntu** $y_1 = 4 - x^2$ funtzioaren azterketa
 - Funtzioaren tarte gorakor eta behekorrak lortzea, **0,3 puntu**
 - Maximoa kalkulatzeko, **0,2 puntu**
- b. 0,75 puntu**
 - $y_2 = 4 - x$ funtzioa grafikoki irudikatzea, **0,25 puntu**.
 - Zatika definitutako funtzioaren grafikoa **0,5 puntu**.
- c. 1,25 puntu.**
 - Azalera zehaztea: $A = A_1 + A_2$ **0,25 puntu**.
 - Integralak kalkulatzeko:
 - ✓ A_1 **0,25 puntu**. A_2 **0,25 puntu**.
 - Barrow-en erregela aplikatuz, azalera kalkulatzeko:
 - ✓ A_1 **0,25 puntu**. A_2 **0,25 puntu**.

B 3 ariketa (2,5 puntu)

- a. Probabilitate osoa kalkulatzeko, 1,5 puntu.**
- b. "A posteriori" probabilitateak kalkulatzeko, 1 puntu.**

B 4 ariketa (2,5 puntu)

- a. 1 puntu.**
 - a. Planteamendua, 0,25 puntu.**
 - b. Aldagaiaren tipifikazioa, 0,25 puntu.**
 - c. Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko, 0,5 puntu.**
- b. 0,75 puntu.** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.
- c. 0,75 puntu.** Parametroa zehaztea.

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

EBAZPENAK

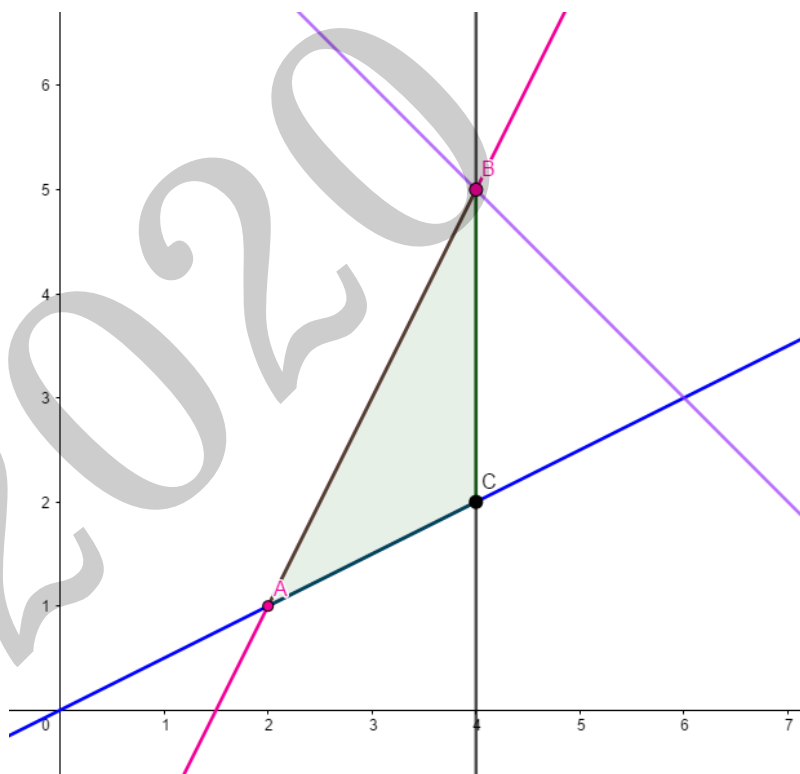
A 1 Bi aldagaiko programazio linealeko problemaren ebazpena

✚ Maximizatu behar den helburu-funtzioa hau da: $F(x, y) = 5x + 4y$

✚ Murrizketak hauek dira:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

✚ Soluzio bideragarrien esparrua, XY planoan:



✚ Beraz, erpinak hauek dira:

$A(2,1)$, $B(4,5)$ eta $C(4,2)$.

✚ $F(A) = F(2,1) = 14$

$F(B) = F(4,5) = 40$

$F(C) = F(4,2) = 28$

✚ Ondorioz, funtzioaren balio maximoa $B(4, 5)$ puntuan lortzen da, eta balio maximo hori 40 da.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

✚ **A 2** Funtzio baten adierazpen grafikoa. Funtzioaren balioak kalkulatzea eta beste funtzio batekin sortzen duen eremuaren azalera kalkulatzea.

a) Aurkitu, arrazoituta, a eta b parametroak: $f(x) = ax^3 + bx + 1$

✚ $(1, -5)$ puntuan, mutur erlatibo bat dago $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = -5 & (1) \\ f'(1) = 0 & (2) \end{cases}$

✚ $f'(x) = 3ax^2 + b$

✚ $(1) f(1) = -5 \Rightarrow a + b + 1 = -5 \Rightarrow a + b = -6$

✚ $(2) f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$

✚ Beraz: $\begin{cases} a + b = -6 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -9 \Rightarrow f(x) = 3x^3 - 9x + 1$

b) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ funtzioaren puntu singularrak

✚ Maximo eta minimo erlatiboak $\Rightarrow f'(x) = 0$

▪ $f'(x) = 6x^2 - 6$

$\Rightarrow f'(x) = 0 = 6x^2 - 6 \Rightarrow$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

▪ $f''(x) = 12x$

$\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 12 > 0 \Rightarrow x = 1 & \text{minimoa} \\ f''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow x = -1 & \text{maximoa} \end{cases}$

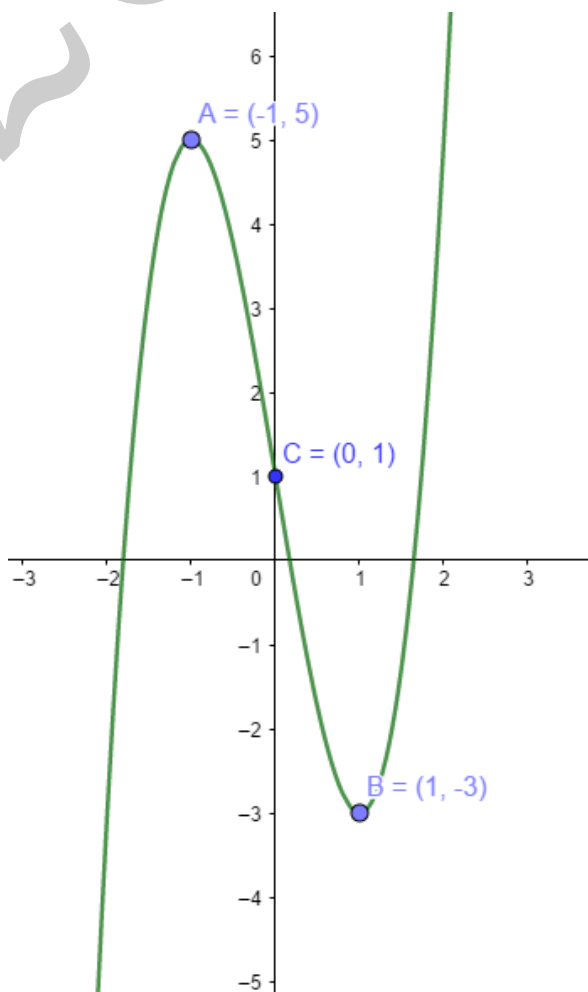
▪ $f(1) = -3 \Rightarrow (1, -3)$ **minimoa**

▪ $f(-1) = 5 \Rightarrow (-1, 5)$ **maximoa**

✚ Inflexio-puntuak $\Rightarrow f''(x) = 0$

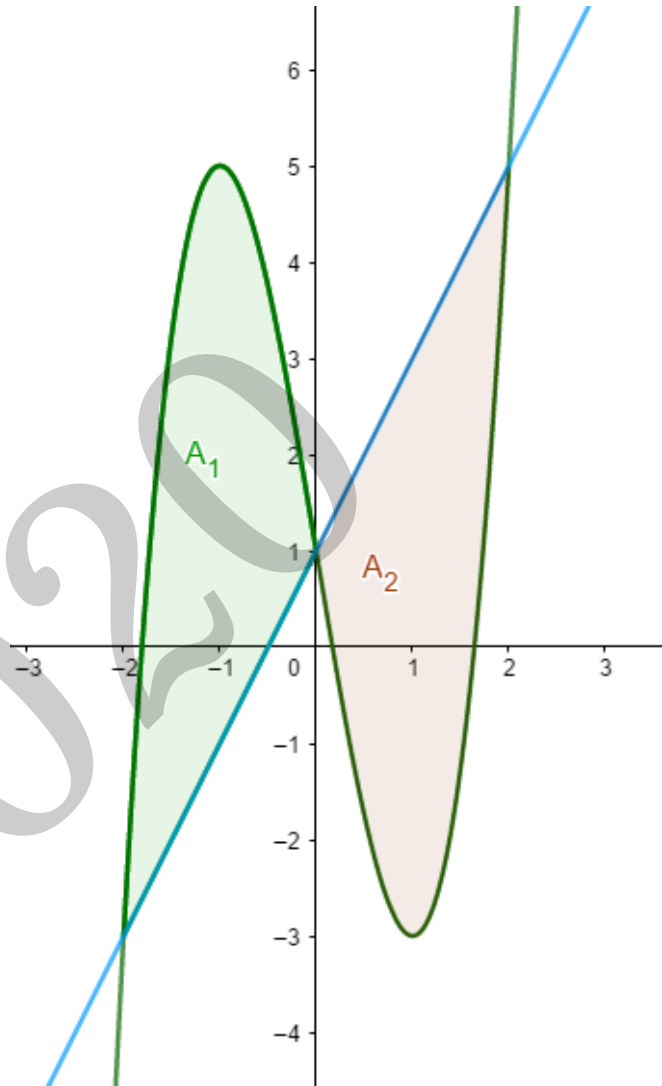
▪ $f''(x) = 12x \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$

▪ $f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$ **inflexio-puntua**



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

- c) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ funtzioak eta $y = 2x + 1$ zuzenak mugatutako eskualdearen azalera



$f(x)$ zuzenarekiko simetrikoa da
orduan $A_1 = A_2$

Beraz:

$$A = A_1 + A_2 = 2 \cdot A_2 =$$

$$= 2 \int_0^2 [(2x + 1) - (2x^3 - 6x + 1)] dx = 2 \left[\left(2 \frac{x^2}{2} + x \right) - \left(\frac{2x^4}{4} - 6 \frac{x^2}{2} + x \right) \right]_0^2 =$$

$$= 2 \left[x^2 + x - \frac{x^4}{2} + 3x^2 - x \right]_0^2 = 2 \left[4x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^2 = 2(16 - 8) = 16 \text{ u}^2$$



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

A 3 Probabilitate-kalkulari buruzko ariketa. Probabilitate baldintzatua

	Herrian jaiotakoak	Herrian EZ jaiotakoak	
NESKAK	0,54	0,04	0,58
MUTILAK	0,36	0,06	0,42
	0,9	0,1	1

a) Ikasle bat zoriz aukeratuta, zein da institutua dagoen herrian jaioa ez izateko probabilitatea?

$$P(\text{herrian ez jaioa}) = \mathbf{0,1}$$

b) Neska izateko eta institutua dagoen herrian jaioa ez izateko probabilitatea?

$$P(\text{neska} \cap \text{herrian ez jaioa}) = \mathbf{0,04}$$

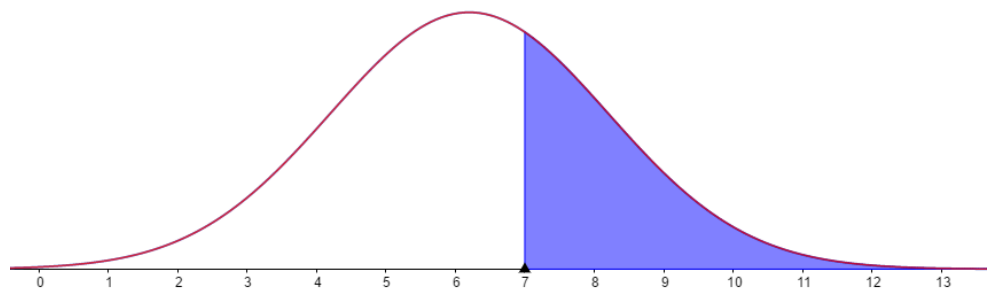
c) Ikasle bat zoriz aukeratu da, eta suertatu da herrian jaioa izatea. Zein da mutila izateko probabilitatea?

$$P(\text{mutila} | \text{herrian jaioa}) = \frac{P(\text{mutila} \cap \text{herrian jaioa})}{P(\text{herrian jaioa})} = \frac{0,36}{0,90} = \mathbf{0,4}$$

A 4 Banaketa normala ulertzea eta erabiltzea, eta probabilitate-kalkulua

a) $X \equiv N(\mu = 6,2, \sigma = 2)$

$P(X > 7) = ?$

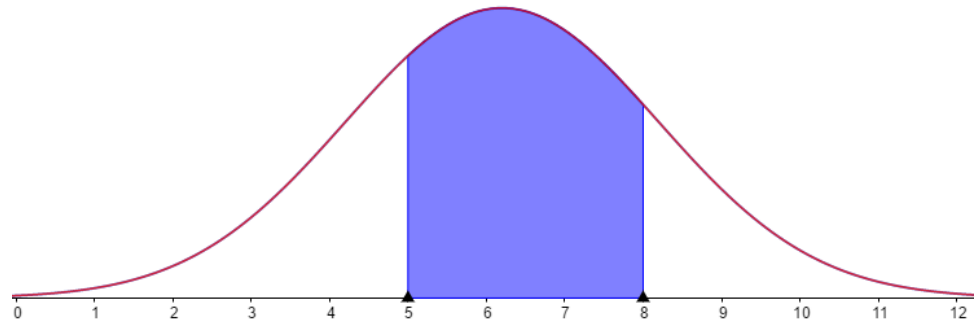


$$P\left(\frac{X - 6,2}{2} > \frac{7 - 6,2}{2}\right) = P(Z > 0,4) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - F(0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(X > 7) = 0,3446}$$

**ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN**

b) $P(5 \leq X \leq 8) = ?$

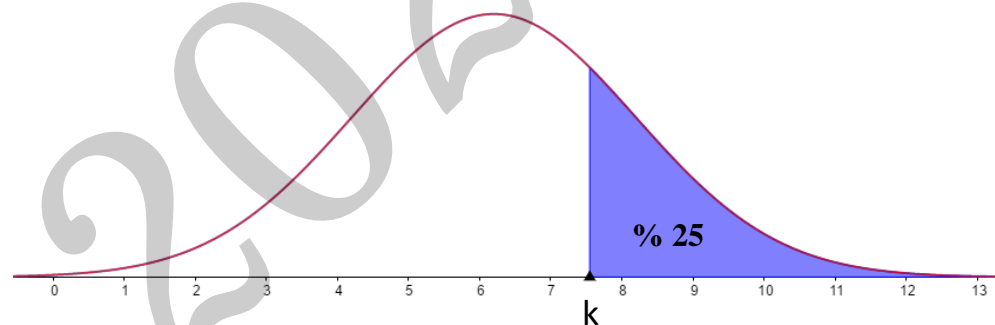


$$P(5 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{5 - 6,2}{2} \leq \frac{X - 6,2}{2} \leq \frac{8 - 6,2}{2}\right) = P(-0,6 \leq Z \leq 0,9) = F(0,9) - F(-0,6) =$$

$$= F(0,9) - (1 - F(0,6)) = 0,8159 - (1 - 0,7257) = 0,5416$$

$$\Rightarrow P(5 \leq X \leq 8) = 0,5416$$

c) $k ?$, non $P(X > k) = 0,25$.



$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X - 6,2}{2} \leq \frac{k - 6,2}{2}\right) = 0,75$$

Orduan,

$$\frac{k - 6,2}{2} = 0,675 \Rightarrow k = 7,55$$

Beraz, ikasleen **% 25ek 7,55 puntu baino gehiago** atera du azterketan; horrenbestez, bikain ateratzeko gutxieneko nota 7,55 puntu da.

B 1 *Matrize baten dimentsioa. Matrize-kalkulua. Matrize baten alderantzizkoa.*

a) $(A \cdot A^t)^{-1} = ?$

$$\color{red}{\oplus} (A \cdot A^t) = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

✚ $(A \cdot A^t)^{-1} = C^{-1}$

✚ $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

✚ $|C| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 6$

Orduan;

$$C^{-1} = \frac{Adj(C^t)}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = (A \cdot A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

b) Ba al du $(A^t \cdot A)$ matrizeak alderantzizkorik?

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Beraz, alderantzizkoa ez da existitzen.}$$

c) Kalkulatu $A \cdot B$ eta $A^t \cdot B$

✚ $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$ eta $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$. Beraz, $A \cdot B$ ez da existitzen.

✚ $A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

B 2 Funtzio baten ezaugarrien azterketa. Adierazpen grafikoa. Funtzioak abzisa-ardatzarekin sortzen duen eremuaren azalera kalkulatzea

a) Aztertu $y = 4 - x^2$ funtzioa

✚ Tarte gorakorak eta beherakorak

$f(x)$ gorakorra da, baldin eta $f'(x) > 0$

$f'(x) = -2x \Rightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow (-\infty, 0)$ tartean, funtzioa gorakorra da.

Beraz, $(0, \infty)$ tartean, funtzioa beherakorra da.

✚ Maximo eta minimo erlatiboak.

- $f(x)$ jarraitua da \mathbb{R} osoan, $(-\infty, 0)$ tartean gorakorra eta $(0, \infty)$ tartean beherakorra da. Beraz, $x = 0$ abzisa-puntuan badu maximo erlatibo bat.

**ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN**

- $f(0) = 4 \Rightarrow (0, 4)$ puntua maximo erlatiboa da.

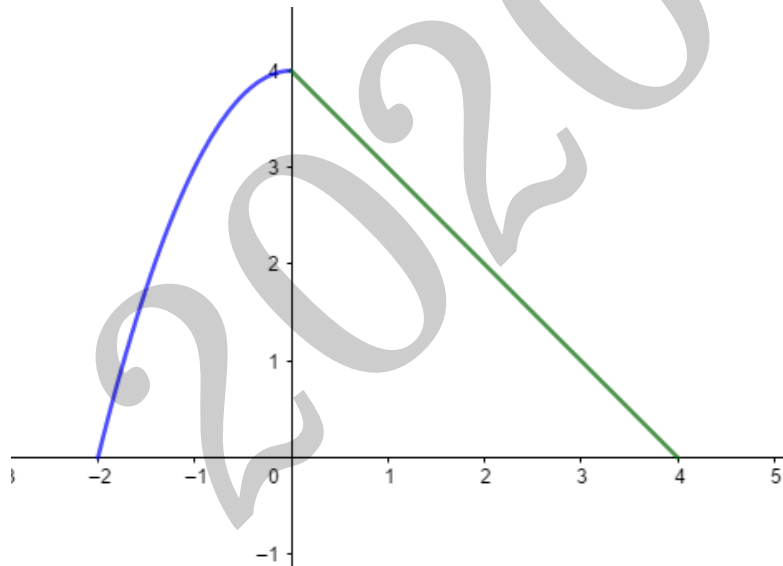
BESTE MODU BAT:

- $f'(x) = -2x \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ abzisa puntuan, maximo erlatibo bat dago

Beraz, $(0, 4)$ puntua maximo erlatiboa da.

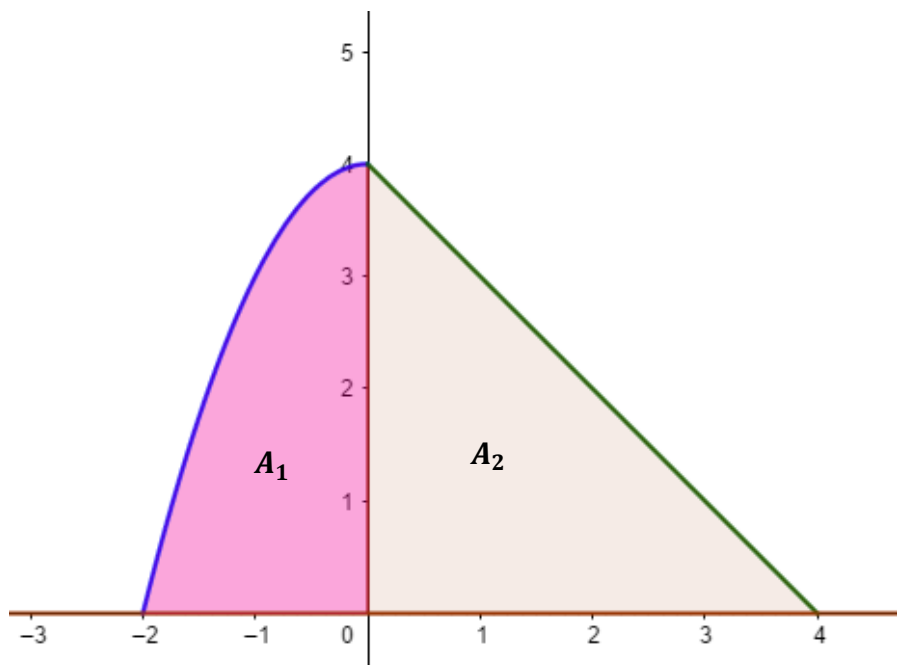
b) Adierazpen grafikoa

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{baldin eta } -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{baldin eta } 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \text{ bada}$$



c) $f(x)$ funtzioaren grafikoak eta abzisa-ardatzak mugatutako eskualdearen azalera

$$A = A_1 + A_2$$





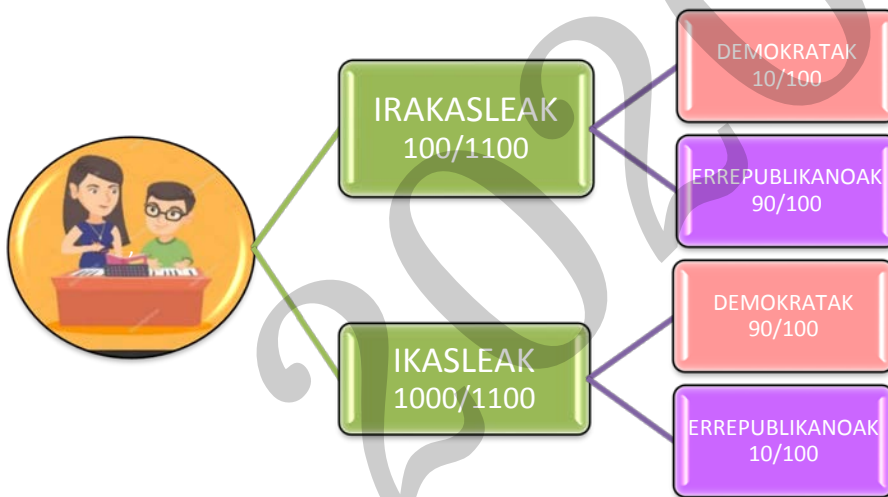
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

$$A_1 = \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 = - \left(-8 - \frac{-8}{3} \right) = \frac{16}{3} u^2$$

$$A_2 = \int_0^4 (4 - x) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = (16 - 8) = 8 u^2$$

Beraz: $A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3} \Rightarrow A = \frac{40}{3} u^2$

B 3 Probabilitateen kalkuluak. Probabilitate osoa. A posteriori probabilitatea.



a) Probabilitate osoaren bidez:

$$P(\text{errepublikanoa}) = P(\text{irakasle}) \cdot P(\text{errep. | irakasle}) + P(\text{ikasle}) \cdot P(\text{errep. | ikasle}) = \frac{100}{1100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{1000}{1100} \cdot \frac{10}{100} = \mathbf{0,1727}$$

a) "a posteriori" probabilitatea

$$P(\text{ikasle | errepublikano}) = \frac{P(\text{ikasle} \cap \text{errepublikano})}{P(\text{errepublikano})} = \frac{P(\text{ikasle}) \cdot P(\text{errepublikano | ikasle})}{0,1727} = \frac{\frac{1000}{1100} \cdot \frac{10}{100}}{0,1727} = \frac{0,0909}{0,1727} = \mathbf{0,5263}$$



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

BESTE MODU BAT (Kontingentzia-etaula)

	DEMOKRATAK	ERREPUBLIKANOAK	
IKASLEAK	900	100	1000
IRAKASLEAK	10	90	100
	910	190	1100

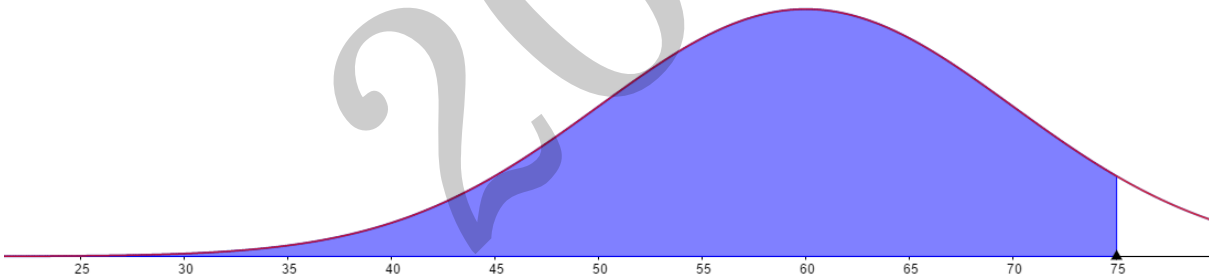
$$P(\text{errepublikano}) = \frac{190}{1100} = 0,1727$$

$$P(\text{ikasle}|\text{errepublikano}) = \frac{P(\text{ikasle} \cap \text{errepublikano})}{P(\text{errepublikano})} = \frac{100}{190} = 0,5263$$

B 4 Banaketa normala ulertzea eta erabiltzea, eta probabilitate-kalkulua.

$$X \equiv N(\mu = 60, \sigma = 10)$$

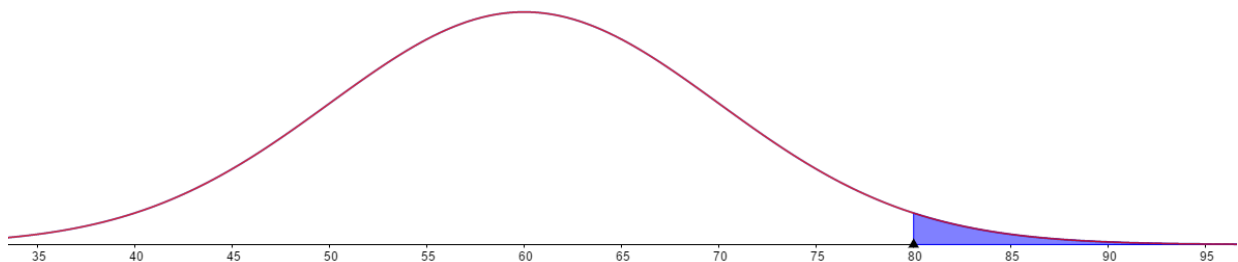
a) $P(X \leq 75) = ?$



$$P(X \leq 75) = P\left(\frac{X - 60}{10} \leq \frac{75 - 60}{10}\right) = P(Z \leq 1,5) = F(1,5) = 0,9332 \Rightarrow P(X \leq 75) = 0,9332$$

Beraz, ikasleen % 93,32k azterketa garaiz bukatuko du.

b) $P(X \geq 80) = ?$



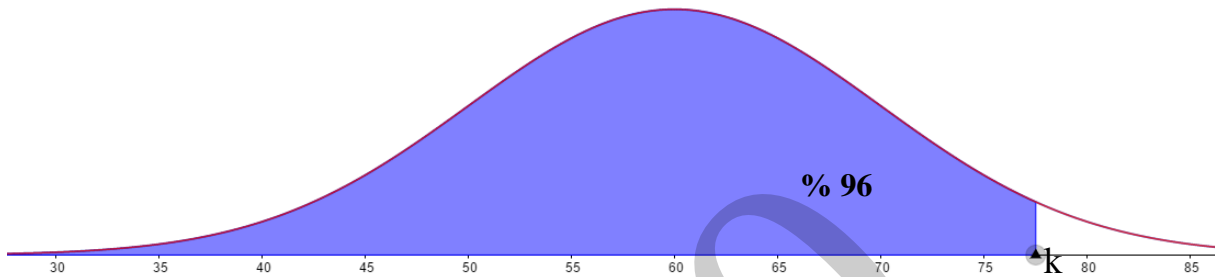


ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X-60}{10} \geq \frac{80-60}{10}\right) = 1 - P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{80-60}{10}\right) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Hau da, ikasleen % 2,28k ez du garaiz bukatuko azterketa.

c) k ,? non $P(X \leq k) = 0,96$.



$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{k-60}{10}\right) = 0,96 \Rightarrow \frac{k-60}{10} = 1,75 \Rightarrow k = 77,5$$

Hau da, ikasleen % 96k azterketa garaiz bukatzea nahi baldin bada, **77,5 minutu** eman behar dira.