eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas II

EAU 2019

www.ehu.eus

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.

Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:
pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera, ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera, determinanteen kalkulua egiteko aukera, deribatuak eta integralak egiteko aukera, datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene dos opciones.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

El examen consta de cinco ejercicios.

Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:
pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

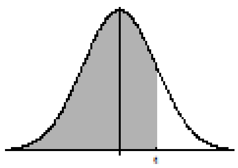
eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2019ko EKAINA — *JUNIO 2019*

MATEMATIKA II — ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2019ko EKAINA | *JUNIO 2019*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$S = \begin{cases} (m+3)x & +my & +mz & = m-1 \\ 3x & & +mz & = m-2 \\ & -y & +z & = m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Ejercicio A2

Sean la recta

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{y el plano } x - y + Az = 0.$$

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?

b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,0,0)$.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el **punto exterior** a su gráfica $P(6,0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P.

Ejercicio A4

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Ejercicio A5

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?

b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenezca a la primera caja?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Ejercicio B2

Se consideran los tres puntos $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Ejercicio B3

Sea f la función $f(x) = x^2 e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f. Hallar los máximos y mínimos de f.

Ejercicio B4

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Ejercicio B5

Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

a) sea superior a 1500.

b) esté comprendido entre 1000 y 1100.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

OPCIÓN A

A.1.

• Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos que no anulan el determinante ($0,75$ puntos).

• Discusión en los casos de $m = 0$ y $m = 3$ ($0,75$ puntos).

• Resolución para el caso $m = 3$ ($0,5$ puntos).

A.2.

• Planteamiento del problema: obtención del vector director de la recta, vector normal al plano y el valor de A (1 punto).

• Obtención del plano perpendicular a r y que pase por $(0,0,0)$ (1 punto) .

A.3.

• Obtención de la ecuación de las rectas que pasa por el punto $(6,0)$ y son tangentes a la parábola dada. (1 punto).

• Obtención de las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola para $a = 16$ ($0,5$ puntos) y $a = -4$ ($0,5$ puntos).

A.4.

- Aplicación de la integración por partes ($0,5$ puntos).
- Cálculo correcto de la integral aplicando el método anterior ($1,5$ puntos).

A.5.

- Planteamiento correcto del ejercicio ($0,5$ puntos).
- Resolución del apartado a) ($0,75$ puntos).
- Resolución correcta del apartado b) ($0,75$ puntos).

OPCIÓN B

B.1.

• Cálculo de la matriz A^2 o razonamiento sobre determinante del producto como producto de los determinantes (1 punto).

• Cálculo de a de manera correcta (1 punto).

B.2.

• Responder correctamente a la pregunta de si están alienados (1 punto).

• Obtención del plano que contiene a los tres puntos A, B y C (1 punto).

B.3.

• Cálculo correcto de la primera derivada ($0,5$ puntos).

• Cálculo correcto de la segunda derivada ($0,5$ puntos).

• Cálculo correcto del mínimo ($0,5$ puntos).

• Cálculo correcto del máximo ($0,5$ puntos).

B.4.

• Dibujo adecuado del recinto como intersección de una recta y una parábola y el cálculo de los puntos de corte de ambas funciones (1 punto).

• Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1 punto).

B.5.

• Identificar el modelo de probabilidad. ($0,5$ puntos).

• Resolución del el apartado a) ($0,75$ puntos).

• Resolución del apartado b) ($0,75$ puntos).

OPCIÓN A

SOLUCIÓN A1

El determinante del sistema es igual a $m(m-3)$, por tanto, para $m \neq 0$ y $m \neq 3$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Para $m = 0$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, por tanto, el sistema es INCOMPATIBLE.

Para $m = 3$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada también es 2, por tanto el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

La solución es $x = -t + 1/3\, y = t, z = t$.

SOLUCIÓN A2

a) El vector director de la recta r es $v_r = (5, 8, 1)$. El vector normal del plano es $(1, -1, A)$. Tienen que ser perpendiculares para que se cumpla lo pedido, es decir, su producto escalar debe ser cero. Por lo tanto,

$$0 = (5, 8, 1).(1, -1, A) \text{ de donde: } -3 + A = 0, \quad \text{o sea} \quad A = 3.$$

b) Para calcular el plano perpendicular a la recta, tenemos un punto $A(0, 0, 0)$ y el vector normal a dicho plano que es el vector director de la recta. Por ello el plano buscado es $5x + 8y + z = 0$.

SOLUCIÓN A3

El punto genérico de la gráfica de f es (a, a^2+64). La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y - (a^2 + 64) = 2a(x - a)$. Para que pase por el punto exterior $(6, 0)$ debe cumplirse la ecuación $-(a^2 + 64) = 2a(6 - a)$ o lo que esequivalente $a^2 - 12a - 64 = 0$. Esta ecuación tiene dos soluciones: $a = -4$ y $a = 16$.

Para $a = -4$ la recta tangente es $y = -8x + 48$.

Para $a = 16$ la recta tangente es $y = 32x - 192$.

SOLUCIÓN A4

La integral se puede resolver mediante integración por partes, donde $u = x$ y $dv = e^{-4x}dx$. Con este cambio resultan $du = dx$ y $v = -\frac{1}{4}e^{-4x}$. Es decir:

$$\int xe^{-4x}dx = -\frac{1}{4}xe^{-4x} - \int -\frac{1}{4}e^{-4x}dx = -\frac{e^{-4x}(4x+1)}{16} + C.$$

SOLUCIÓN A5

Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

Sean los siguientes sucesos:

R saco botón rojo, R' No saco botón rojo.

C_1 procede de la primera caja, C_2 procede de la segunda caja y C_3 procede de la tercera caja.

a)

$$P(R) = P(C_1).P(R/C_1)+P(C_2).P(R/C_2)+P(C_3).P(R/C_3) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{47}{180}$$

b)

$$P(C_1/R) = \frac{P(C_1).P(R/C_1)}{P(R)} = \frac{20}{47}$$

OPCIÓN B

SOLUCIÓN B1

El determinante del producto es igual al producto de los determinantes y el determinante de la matriz dada es a. Por ello el valor buscado debe satisfacer $a^2 = 4$, es decir $a = 2$ o $a = -2$.

SOLUCIÓN B2

El vectores $AB = (1, 1, 0)$ y el vector $AC = (-1, -1, 1)$ no son proporcionales, por lo que los tres puntos no están alineados. El producto vectorial de los dos vectores anteriores es $v = (1, -1, 0)$ por lo que el plano que contiene a los tres puntos es $x - y = 0$.

SOLUCIÓN B3

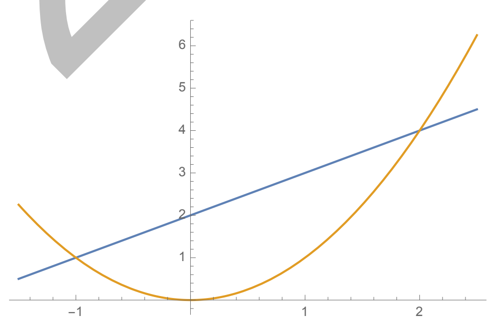
La primera derivada es $f'(x) = 2x(1 - 2x)e^{-4x}$.

La segunda derivada es $f''(x) = (16x^2 - 16x + 2)e^{-4x}$.

En $x = 0$ hay un mínimo y en $x = 1/2$ hay un máximo.

SOLUCIÓN B4

El recinto es el siguiente:



Los puntos de corte de la recta y la parábola son $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

El area del recinto se calcula mediante la siguente integral definida:

$$\int_{-1}^{2}(x + 2 - x^2)dx = \frac{9}{2}.$$

SOLUCIÓN B5

Ejercicio de Distribución Binomial $B(6{,}000, 0, 167)$, se aproxima a la Normal $N(1000, 28, 9)$.

a) $P(x > 1500) = P(x > 1500{,}5) = P(z > \frac{1500{,}5-1000}{28{,}9}) = P(z > 17, 3) = 0.$

b) $P(1000 < x < 1100) = P(1000{,}5 < x < 1099{,}5) =$

$P((1000{,}5-1000)/28, 9 < z < (1099{,}5-1000)/28, 9) = P(z < 3, 48)$ - P(z < 0,002)
= 0,4917.