

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Matematika II

USE 2019

www.ehu.es





***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.

Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:
pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera, ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera, determinanteen kalkulua egiteko aukera, deribatuak eta integralak egiteko aukera, datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene dos opciones.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

El examen consta de cinco ejercicios.

Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:
pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.



A AUKERA

A1 Ariketa

Eztabaidatu honako ekuazio sistema hau, m parametroaren balioen arabera.

$$S = \begin{cases} (m+3)x + my + mz = m-1 \\ 3x + mz = m-2 \\ -y + z = m-3 \end{cases}$$

Ebatzi bateragarri indeterminatua den kasuetan, baldin eta halakorik bada.

A2 Ariketa

Izan bitez

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \text{ zuzena eta } x - y + Az = 0 \text{ plano.}$$

a) Existitzen al da A -ren balioen bat, zeinetarako plano r -rekiko paraleloa den?

b) Aurkitu $(0, 0, 0)$ puntutik pasatzen den eta r zuzenarekiko perpendikularra den planoaren ekuazioa.

A3 Ariketa

Izan bitez $f(x) = x^2 + 64$ funtzioa eta $P(6, 0)$ f -ren grafikoarekiko **kanpoko puntua**. Aurkitu P puntutik pasatzen d(ir)en f -ren zuzen ukitzaila(k).

A4 Ariketa

Kalkula ezazu $\int x e^{-4x} dx$, kalkulua egiteko erabili duzun prozedura azalduz.

A5 Ariketa

Mahai baten gainean botoiz beteriko hiru kutxa ditut; lehenengo kutxan 3 botoi daude, bigarrenean 5 eta hirugarrenean 4 botoi. Botoi gorri bakarria dago kutxa bakoitzeko. Zoriz kutxa bat aukeratzen badut eta bertatik, zoriz, botoi bat ateratzen badut:

a) Zein da botoia gorria izateko probabilitatea?

b) Atera dudana botoia gorria izan dela jakinik, zein da probabilitatea lehenengo kutxakoa izateko?



B AUKERA

B1 Ariketa

$A(a)$ matrizea emanda

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

kalkula ezazu, arrazoituz, a -ren balioa, $A(a)^2$ -ren determinatea 4 izateko.

B2 Ariketa

Izan bitez $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ eta $C(-1, -1, 2)$ puntuak. Lerrokatuta al daude? Erantzuna baiezkoa bada, kalkula ezazu hiru puntu horietatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa. Erantzuna ezezkoa izanez gero, idatzi hiru puntu horiek hartzen dituen planoaren ekuazioa.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^2 e^{-4x}$ funtzioa. Kalkula itzazu f -ren lehenengo eta bigarren deribatua. Aurkitu f -ren maximoak eta minimoak.

B4 Ariketa

Marraztu $y = x + 2$ zuzenak eta $y = x^2$ parabolak mugatzen duten eremu finitua. Kalkula ezazu eremu horren azalera.

B5 Ariketa

Sei aldeko dado bat 6.000 bider botatzen dugu. Kalkulatu zein da probabilitatea lortutako bostekoen kopurua:

- 1.500 baino handiagoa izateko.
- 1.000 eta 1.100 artean egoteko.



MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntuen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak-kalkuluetan egindakoak eta abar- ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eske- mak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1.

- Matrizaren determinantea kalkulatzeko eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu).
- $m = 0$ eta $m = 3$ kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu).
- $m = 3$ kasurako ebaztea (0,5 puntu).

A.2.

- Problema planteatzea: zuzenaren norabide bektorea, planoaren bektore normala eta A-ren balioa lortzea (puntu bat).
- $(0, 0, 0)$ puntutik igaro eta r zuzenaren plano perpendikularra lortzea (puntu bat).

A.3.

- $(6, 0)$ puntutik igaro eta emandako parabolaren tangentea den zuzenaren ekuazioa lortzea (puntu bat).
- Zuzen ukitzaillearen ekuazioa lortzea $a = 16$ denean (0,5 puntu) eta $a = -4$ denean (0,5 puntu).



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

A.4.

- Zatikako integrazioa aplikatzea (0,5 puntu).
- Aurreko metodoa erabiliz, integrala zuzen kalkulatzeko (1,5 puntu).

A.5.

- Problema ondo planteatzea (0,5 puntu).
- a) atala ebaztea (0,75 puntu).
- b) atala ebaztea (0,75 puntu).

2019



B AUKERA

B.1.

• A^2 matrizea kalkulatzeko, edo determinanteen propietatea erabiliz: bi matrizeren arteko biderketaren emaitzaren determinantea eta matrize horien determinanteen biderketaren emaitzak berdinak dira (puntu bat).

- a -ren balioa zuzen kalkulatzeko (puntu bat).

B.2.

- Lerrokatuta al dauden galderari zuzen erantzutea (puntu bat).
- A , B eta C hartzen dituen planoaren lortzea (puntu bat).

B.3.

- Funtzioaren lehenengo deribatua zuzen kalkulatzeko (0,5 puntu).
- Funtzioaren bigarren deribatua zuzen kalkulatzeko (0,5 puntu).
- Funtzioaren minimoa zuzen kalkulatzeko (0,5 puntu).
- Funtzioaren maximoa zuzen kalkulatzeko (0,5 puntu).

B.4.

• Eremua zuzen eta parabolaren ebakidura gisa modu egokian marraztea eta funtzio horien ebakipuntuak kalkulatzeko (puntu bat).

- Eremuaren azalera kalkulatzeko Barrow-en erregelaren bidez (puntu bat).

B.5.

- Probabilidate-eredua identifikatzeko (0,5 puntu).
- a) atala ebaztea (0,75 puntu).
- b) atala ebaztea (0,75 puntu).



A AUKERA

EBAZPENA A1

Sistemaren determinantea $m(m - 3)$ da, orduan: $m \neq 0$ eta $m \neq 3$ direnean, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$m = 0$ denean, koefiziente-matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena 3 da; orduan sistema BATERAEZINA da.

$m = 3$ denean, koefiziente-matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena 2 da ere bai; beraz sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da.

Sistemaren soluzioa $m = 3$ denean: $x = -t + 1/3, y = t, z = t$.

EBAZPENA A2

a) r zuzenaren norabide bektorea $v_r = (5, 8, 1)$ da. Planoaren bektore normala $(1, -1, A)$ da. Eskatutakoa betetzeko bi bektore horiek perpendikularrak izan behar dute, orduan haien biderkadura eskalarra zero izan behar du, hau da: $0 = (5, 8, 1) \cdot (1, -1, A)$ orduan $-3 + A = 0$, hau da $A = 3$.

b) Zuzenaren plano perpendikularra lortzeko, puntu bat $A(0, 0, 0)$ eta planoaren bektore normala ditugu (zuzenaren norabide bektorea). Datu horiekin, eskatutako planoaren ekuazioa, $5x + 8y + z = 0$ izango da.

EBAZPENA A3

Funtzioaren edozein puntu $(a, a^2 + 64)$ da. Puntu horretan funtzioaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $y - (a^2 + 64) = 2a(x - a)$ da. $(6, 0)$ kanpoko puntutik pasatuko bada, ekuazio hau bete behar da: $-(a^2 + 64) = 2a(6 - a)$ edo $a^2 - 12a - 64 = 0$. Ekuazio horrek bi soluzio ditu $a = -4$ eta $a = 16$.

$a = -4$ denean, zuzen ukitzailea $y = -8x + 48$ da.

$a = 16$ denean, zuzen ukitzailea $y = 32x - 192$ da.

EBAZPENA A4

Eskatutako integrala kalkulatzeko, zatikako integrazioaren metodoa erabil dezakegu, non $u = x$ eta $dv = e^{-4x} dx$ diren. Aldaketa horiek eginda, $du = dx$ eta $v = -1/4 e^{-4x}$ dira, beraz

$$\int x e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \int -\frac{1}{4} e^{-4x} dx = -\frac{e^{-4x}(4x + 1)}{16} + C.$$



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPENA A5

Probabilitate baten kalkulua: zuhaitz-diagramaren bidez eta probabilitate baldintzatuaren bidez ebatzi daiteke.

Gertaerak honako hauek dira:

R Botoi gorria atera dugu, R' ez dugu botoi gorria atera.

C_1 lehenengoko kutxakoa izatea, C_2 bigarren kutxakoa izatea eta C_3 hirugarren kutxakoa izatea.

a)

$$P(R) = P(C_1) \cdot P(R/C_1) + P(C_2) \cdot P(R/C_2) + P(C_3) \cdot P(R/C_3) = \frac{11}{33} + \frac{11}{35} + \frac{11}{34} = \frac{47}{180}$$

b)

$$P(C_1/R) = \frac{P(C_1) \cdot P(R/C_1)}{P(R)} = \frac{20}{47}$$



B AUKERA

EBAZPENA B1

Bi matrizeren arteko biderketaren emaitzaren determinantea eta matrize horien determinanteen biderketaren emaitzak berdinak dira. Emandako matrizearen determinantearen balioa a bada, orduan $a^2 = 4$, hau da $a = 2$ edo $a = -2$ izango da.

EBAZPENA B2

$AB = (1, 1, 0)$ bektorea eta $AC = (-1, -1, 1)$ bektorea ez dira proportzionalak; beraz A , B eta C puntuak ez daude lerrokatuta. Bi bektore horien biderkadura bektoriala $v = (1, -1, 0)$ da. Orduan, hiru puntu horiek hartzen dituen planoaren ekuazioa $x - y = 0$ da.

EBAZPENA B3

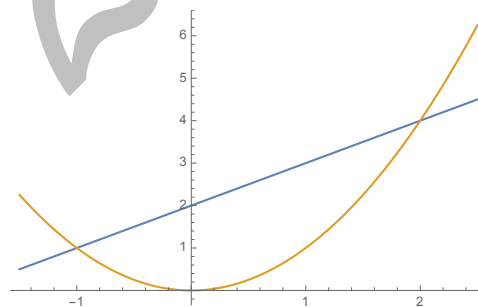
Funtzioaren lehenengo deribatua $f'(x) = 2x(1 - 2x)e^{-4x}$ da.

Funtzioaren bigarren deribatua $f''(x) = (16x^2 - 16x + 2)e^{-4x}$ da.

$x = 0$ denean funtzioak minimoa du eta $x = 1/2$ denean, maximoa.

EBAZPENA B4

Eskatutako eremua:



zuzenaren eta parabolaren ebakipuntuak $(-1, 1)$ eta $(2, 4)$ dira. Eremuaren azalera honako integral definituaren bidez kalkulatzen da:

$$\int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \frac{9}{2}$$



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPENA B5

Banaketa binomialaren ariketa: $B(6000, 0, 167)$, $N(1000, 28, 9)$ normalera hurbiltzen da.

$$a) P(x > 1500) = P(x > 1500,5) = P(z > \frac{1500,5-1000}{28,9}) = P(z > 17,3) = 0.$$

$$b) P(1000 < x < 1100) = P(1000,5 < x < 1099,5) =$$

$$P((1000,5-1000)/28,9 < z < (1099,5-1000)/28,9) = P(z < 3,48) - P(z < 0,002) = 0,4917.$$

2019