

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Gizarte Zientzietan Aplikatuak Matematika II USE 2019

www.ehu.es



Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
 - pantaila grafikoa
 - datuak igortzeko aukera
 - programatzeko aukera
 - ekuazioak ebazteko aukera
 - matrize-eragiketak egiteko aukera
 - determinanteen kalkulua egiteko aukera
 - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
 - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
 - pantalla gráfica
 - posibilidad de transmitir datos
 - programable
 - resolución de ecuaciones
 - operaciones con matrices
 - cálculo de determinantes
 - derivadas e integrales
 - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.

A AUKERA

A 1 (gehienez 3 puntu)

Gozogile batek bi motatako tartak egiten ditu. A motako tarta bat egiteko kilogramo bat ore eta 1,5 kilogramo txokolate behar dira, eta 24 euroan saltzen da. B motakoa 30 euroan saltzen da, eta 1,5 kilogramo orez eta kilogramo bat txokolatez egina dago, taulan agertzen den moduan:

	Orea	Txokolatea
A	1 kg	1,5 kg
B	1,5 kg	1 kg

Gozogileak osagai bakoitzeko 300 kilogramo besterik ez badu, zenbat tarta egin beharko du mota bakoitzetik diru-sarrerarik handiena lortzeko? Zenbatekoa da aipatutako diru-sarrera?

A 2 (gehienez 3 puntu)

Izan bedi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ekuazioa duen kurba.

- Azter itzazu funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.
- Zehaztu maximo eta minimo erlatiboak, eta inflexio-puntuak.
- Aurkitu kurbaren eta OX ardatzaren arteko ebaki-puntuak. Adieraz ezazu kurba grafikoki.
- Kalkula ezazu kurbak eta OX abzisa-ardatzak mugatutako eskualde finituaren azalera.

A 3 (gehienez 2 puntu)

Izan bitez A eta B gertaerak, non $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ eta beraien bilduraren probabilitatea $\frac{3}{4}$ den. Aurki itzazu:

- A gertatzeko probabilitatea aldez aurretik B gertatu dela jakinik.
- Gertaera bietako bat ere ez gertatzeko probabilitatea.
- A gertatzeko eta B ez gertatzeko probabilitatea.
- Gertaera horietako bat baino ez gertatzeko probabilitatea.

A 4 (gehienez 2 puntu)

Populazio batean, 500 pertsonako zorizko lagin bat aukeratu da, eta kirolzaleak diren ala ez galdetu zaie. Hauetariko 350ek baietz erantzun dute, eta gainerakoek ezetz.

Informazio horrekin:

- Zenbatetsi (estimatu) kirol-zaletasuna duen populazioko pertsonen portzentajea, % 95eko konfiantza-mailaz. Kalkula ezazu, halaber, aipatutako konfiantza-mailarako errore maximoa.
- Azaldu lortutako emaitzak.

B AUKERA

B 1 (gehienez 3 puntu)

Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ matrizeak.

- Zehaztu $I + B$ matrizearen alderantzizkoa, non I matrizea 2 ordenako identitate-matrizea den.
- Kalkulatu X eta Y matrizeak, ekuazio hauek bete daitezten:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

B 2 (gehienez 3 puntu)

- Aurkitu bigarren mailako funtzio polinomikoa, jakinda bere grafikoa $(0, 0)$ puntutik igarotzen dela eta $(1, 1)$ puntuan maximo bat duela.
- Aurki ezazu lortutako kurbak eta OX abzisa-ardatzak mugaturiko eskualde finituaren azalera.

B 3 (gehienez 2 puntu)

Baditugu 2 kutxa desberdin: A eta B. Demagun A kutxak 3 bola zuri eta 5 bola beltz dituela eta B kutxak aldiz, 10 bola beltz.

A eta B kutxetatik zoriz bola bana ateratzen da aldi berean, eta trukatu egiten dira (hau da, A kutxatik ateratako bola B kutxan sartzen da, eta B kutxatik ateratako bola A kutxan sartzen da). Ondoren, A kutxatik bola bat ateratzen bada, zein da bola hori beltza izateko probabilitatea?

B 4 (gehienez 2 puntu)

Hiri jakin batean, garraio publikoan familiek egindako urteroko gastuak batezbestekoa μ eta desbideratze tipikoa 75 € dituen banaketa normalari jarraitzen dio.

Zoriz aukeratutako 100 familiako lagin batean, 250 euroko batez besteko gastua lortu da.

- Kalkulatu zein balioren artean egongo den populazioaren batez besteko gastua, % 99ko konfiantza-mailaz.
- Zer tamaina izan beharko luke laginak, % 99ko konfiantza-mailaz, errore maximoa 10 eurokoa izateko?



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

GIZARTE-ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUAZIORAKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Problemen puntuazioak:
 - a. Lehenengo bi problemak 0 eta 3 puntu artean baloratuko dira.
 - b. Azken biak 0 eta 2 puntu artean.
3. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab. ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa $2,5$ dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebaztitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

A AUKERA

A.1 ariketa (3 puntu)

- Helburu funtzioa zehaztea, **0,25 puntu.**
- Murrizketak zehaztea, **0,5 puntu.**
- Bideragarritasun- eskualdea irudikatzea, **1,25 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdearen erpinak zehaztea, **0,5 puntu.**
- Funtzioa erpinetan baloratzea, **0,25 puntu.**
- Maximoa zehaztea eta puntu horretan funtzioak duen balioa zehaztea, **0,25 puntu.**

A.2 ariketa (3 puntu)

- 0,75 puntu**
 - Deribatua kalkulatzeko, **0,25 puntu.**
 - Funtzioaren goratze- eta beheratze-tarteak lortzea, **0,5 puntu.**
- 0,75 puntu**
 - Maximo eta minimo erlatiboak kalkulatzeko, **0,5 puntu.**
 - Inflexio-puntuak lortzea, **0,25 puntu.**
- 0,75 puntu**
 - Ebaki-puntuak, **0,25 puntu.**
 - Irudikapen grafikoa, **0,5 puntu.**
- 0,75 puntu**
 - Integrala kalkulatzeko, **0,25 puntu.**
 - Barrow-en erregelaren bidez azalera kalkulatzeko, **0,5 puntu.**

A.3 ariketa (2 puntu)

- 0,5 puntu.** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.
- 0,5 puntu.** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.
- 0,5 puntu.** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.
- 0,5 puntu.** Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko.

A.4 ariketa (2 puntu)

- 1,5 puntu**
 - Konfiantza-tartea zehaztea, **1 puntu.**
 - Errore maximoa kalkulatzeko, **0,5 puntu.**
- 0,5 puntu.** Lortutako emaitzak azaltzea.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

B AUKERA

B.1 ariketa (3 puntu)

- a. $(I + B)$ matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko, **1 puntu**.
- b. Sistema ebaztea, **2 puntu**.
 - Y zehaztea, **0,25 puntu**.
 - Y matrizea kalkulatzeko, **0,5 puntu**.
 - A matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko, **0,75 puntu**.
 - X matrizea kalkulatzeko, **0,5 puntu**.

B.2 ariketa (3 puntu)

- a. **1,5 puntu**
 - Baldintzak zehaztea **1 puntu**.
 - i. 0,25 puntu, $(0, 0)$ puntua funtzioaren puntu bat da.
 - ii. 0,25 puntu, $(1, 1)$ puntua funtzioaren puntu bat da.
 - iii. 0,5 puntu, $(1, 1)$ puntuan funtzioak maximoa erlatibo du.
 - Sistema ebaztea **0,5 puntu**.
- b. **1,5 puntu**
 - Ebaki-puntuak, **0,25 puntu**.
 - Adierazpen grafikoa, **0,5 puntu**.
 - Integrala kalkulatzeko, **0,25 puntu**.
 - Barrow-en erregelaren bidez azalera kalkulatzeko, **0,5 puntu**.

B.3 ariketa (2 puntu)

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,5 puntu**.
- Probabilitatea kalkulatzeko, **1,5 puntu**.

B.4 ariketa (2 puntu)

- a. **1,25 puntu**. Konfiantza-tartea zehaztea.
 - $z_{\frac{\alpha}{2}}$ zehaztea, **0,25 puntu**.
 - Konfiantza-tartea zehaztea, **1 puntu**.
- b. **0,75 puntu**. Errorea kalkulatzeko.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

EBAZPENAK

A AUKERA

A 1 Bi aldagaiko programazio linealeko problemaren ebazpena.

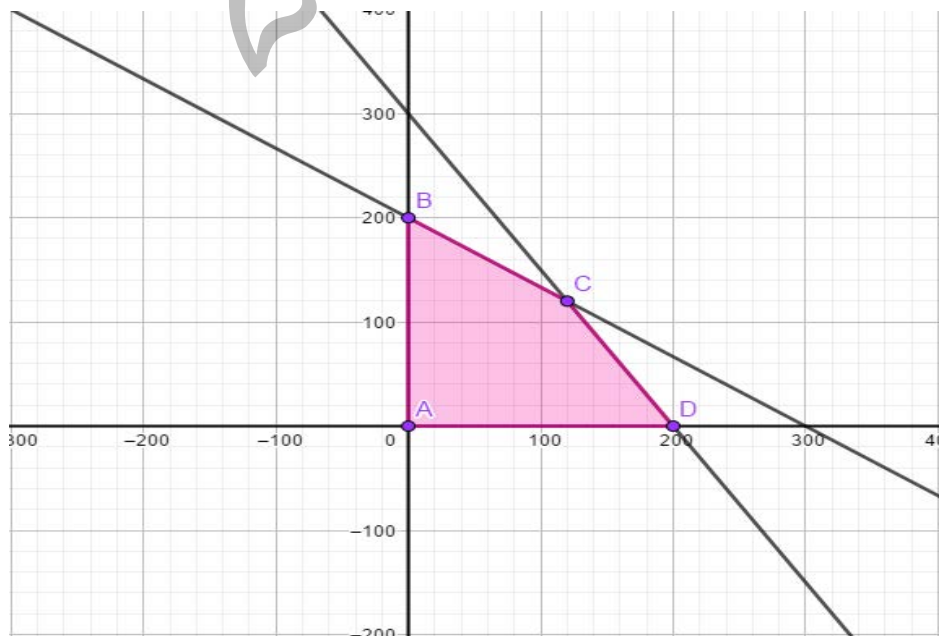
	Orea	Txokolatea	Prezioa (€)	Zenbat ?
A	1 kg	1,5 kg	24 €	x
B	1,5 kg	1 kg	30 €	y

✚ $f(x, y) = 24x + 30y$ helburu funtzioa maximizatu,

✚ Murrizketak hauek dira:

$$\left. \begin{aligned} x + 1,5y &\leq 300 \\ 1,5x + y &\leq 300 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

✚ Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



✚ Hau da, erpinak hauek dira: $A(0, 0)$, $B(0, 200)$, $C(120, 120)$, eta $D(200, 0)$.

✚ Funtzioaren **maximoa** $C(120, 120)$ puntuan dago, eta puntu horretan funtzioaren balioa $f(120, 120) = 6480$ da.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

Ondorioz, **mota bakoitzeko 120 tarta egin beharko lituzke diru-sarrera maximoa lortzeko**, hau da, 6480 euro.

A 2 Funtzio baten azterketa. Funtzioaren balioen kalkulua zein haren maximo eta minimo erlatiboak, inflexio-puntuak eta abar...

- a) Goratze- eta beheratze-tarteak zehazteko, lehenengo deribatuaren zeinua aztertuko dugu:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

	0	2	4
$(x-1)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
$(x-1)(x-3)$	+	-	+

Orduan, gorakorra da $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ tartean eta beherakorra $(1, 3)$ tartean

- b) Maximo, minimo erlatiboak, eta inflexio-puntuak

- Maximo eta minimo erlatiboak

✓ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ eta $x = 3$ puntu singular

✓ $f''(x) = 6x - 12$

$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0$; $f(1) = 4 \rightarrow (1, 4)$ **Maximo erlatiboa**

$f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$; $f(3) = 0 \rightarrow (3, 0)$ **Minimo erlatiboa**

- Inflexio-puntuak

✓ $f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

✓ $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$. Orduan $x = 2$

$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow (2, 2)$ **Inflexio-puntua**

- c) Kurba horren eta OX ardatzaren arteko ebaki-puntuak.

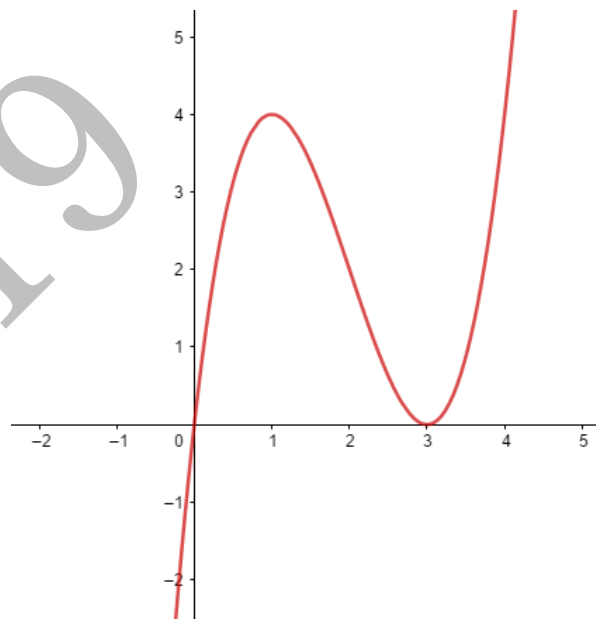
$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, \quad x = 3 \quad \Rightarrow$$

Hau da, **$(0, 0)$ $(3, 0)$ puntuak dira kurbaren eta OX ardatzaren arteko ebaki-puntuak.**



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

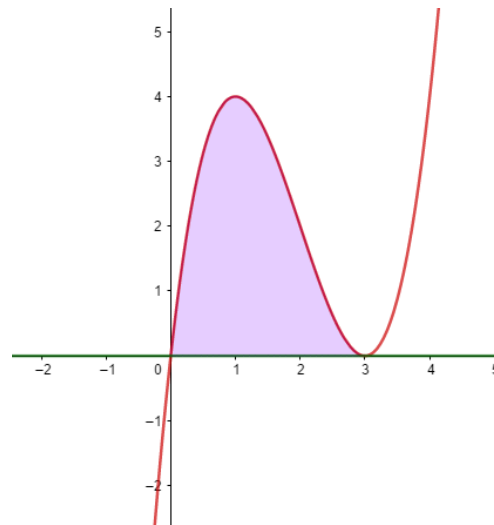
- Adierazpen grafikoa:



- d) Kurba horrek eta OX ardatzak mugatutako eskualdearen azalera:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 9x) - 0] dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^3}{3} + 9 \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{4} u^2 \end{aligned}$$

Hau da: $A = \frac{27}{4} u^2$



A 3 Kontingentzia-taula baten bidez edo probabilitate baldintzatuen bidez ebatz daitekeen probabilitate-kalkuluaren ariketa.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

Datuak: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

a) B gertatu dela jakinda A gertatzeko probabilitatea, hau da, $P(A|B)$:

- $P(A \cap B)$?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

- Orduan, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{1}{4}$

b) Bietako bat ere ez gertatzeko probabilitatea, hau da, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

- Kontingentzia-taula eratuko dugu, $P(A)$, $P(B)$ eta $P(A \cap B)$ balioak jakinda:

	A	\bar{A}	
B	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
\bar{B}	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Eta taulan hau ikusten dugu: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}$

- **Beste modu bat:**

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

c) A bai eta B ez gertatzeko probabilitatea, hau da, $P(A \cap \bar{B})$.

- Taulan, hau ikusten dugu: $P(A \cap \bar{B}) = \frac{5}{12}$

- **Beste modu bat:**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

d) Gertaera horietako bat baino ez gertatzeko probabilitatea, hau da,

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

- Taulan, hau ikusten dugu: $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$

- **Beste modu bat:**

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 1 - [P(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup P(A \cap B)] =$$

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

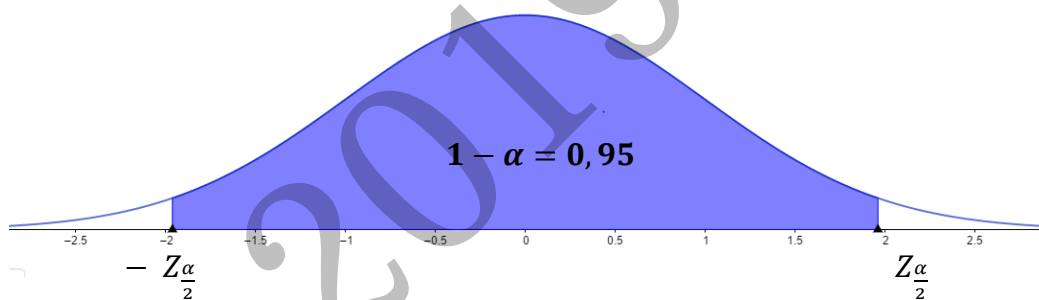
$$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A 4 Populazio baten proportziorako konfiantza-tartea eta errorea kalkulatzea.

a) Kirol-zaletasuna duen populazioaren portzentajea zenbatestea:

- Laginaren tamaina: $n = 500$
- $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7$ laginean agertzen den kirolzale-proportzioa.
- $\hat{q} = 1 - 0,7 = 0,3$

✚ proportziorako konfiantza-tartea % 95eko konfiantza-mailaz:



- Konfiantza-maila: $n_c = 0,95$

$$n_c = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,025 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,025 \Rightarrow \\ \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \end{array} \right.$$

- Proportziorako konfiantza-tartea:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} ; \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

$$\left(0,7 - 1,96 \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}} , 0,7 + 1,96 \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}} \right) = (0,7 - 0,04 ; 0,7 + 0,04) =$$

$$= (0,66 ; 0,74)$$

Hau da, kirolerako zaletasuna duten pertsonen portzentajea populazioaren % 66 eta % 74 artean dago, % 95eko konfiantza-mailaz.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

✚ Errore maximoa % 95eko konfiantza-mailaz.

Proporziorako errore maximoa konfiantza-tartearen zabaleraren erdia da, hau da:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$$e_m = 1,96 \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}} = \mathbf{0,04}, \text{ hau da, } \mathbf{\% 4}.$$

b) Lortutako emaitzak azaltzea

Esan daiteke, % 95eko konfiantza-mailaz, kirolerako zaletasuna duen populazioaren portzentajea % 66 baino handiagoa eta % 74 baino txikiagoa dela, eta horrek esan nahi du errore maximoa % 4 dela.



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

B AUKERA

B 1 Matrizen-kalkulua. Sistema matritziala.

a) Zehaztu $(I + B)^{-1}$

✚ $I + B$ matrizeari D deitzen diogu:

$$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = D$$

$$\text{✚ } (I + B)^{-1} = D^{-1} = \frac{1}{|D|} (\text{Adj } D)^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Kalkulatu X eta Y matrizeak, non hau betetzen baita:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

$$\text{✚ } \begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases} \Rightarrow Y + BY = C \Rightarrow IY + BY = C \Rightarrow (I + B)Y = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DY = C \Rightarrow D^{-1}DY = D^{-1}C \Rightarrow Y = D^{-1}C$$

✚ Beraz:

$$Y = D^{-1}C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

✚ X zehazteko:

$$AX = Y \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \Rightarrow X = A^{-1}Y$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ondorioz:

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Hau da:

$$X = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad Y = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

B 2 Funtzio baten parametroen kalkulua. Funtzioaren balioak eta funtzioak abzisa-ardatzarekin mugatzen duen eskualdearen azalera kalkulatzeko.

a) Zehaztu a, b, c non $f(x) = ax^2 + bx + c$

- $(0, 0)$ puntutik igarotzen da $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Ondorioz: $f(x) = ax^2 + bx$

- $(1, 1)$ puntuan, maximo erlatiboa \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacksquare f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = 2a + b = 0 \\ \blacksquare \text{Funtzioaren puntu bat da} \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = a + b = 1 \end{array} \right.$$

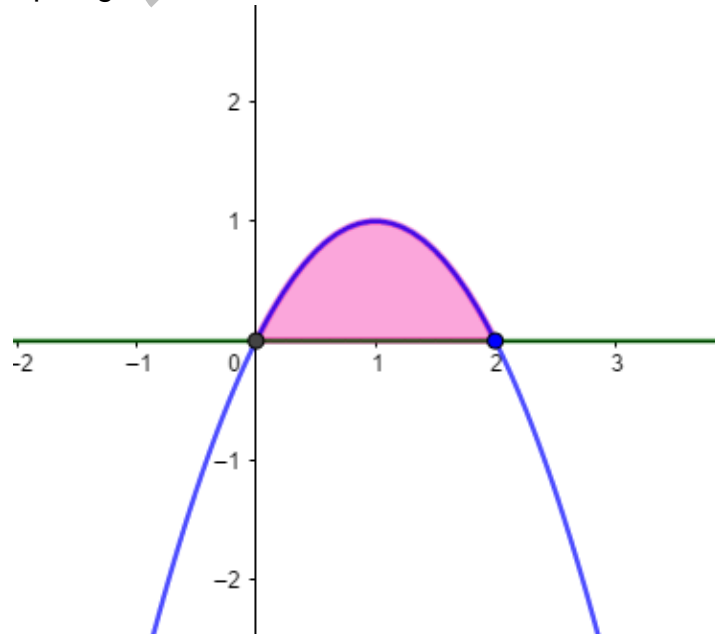
Beraz: $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ eta } b = 2$ Hau da, $f(x) = -x^2 + 2x$

b) Kurbak eta OX abzisa-ardatzak mugaturiko eskualdearen azalera:

- ✚ Kurba horren eta OX ardatzaren arteko ebaki-puntuak zehaztuko ditugu:

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow (0, 0) \text{ eta } (2, 0) \text{ ebaki-puntuak}$$

- ✚ Adierazpen grafikoa :



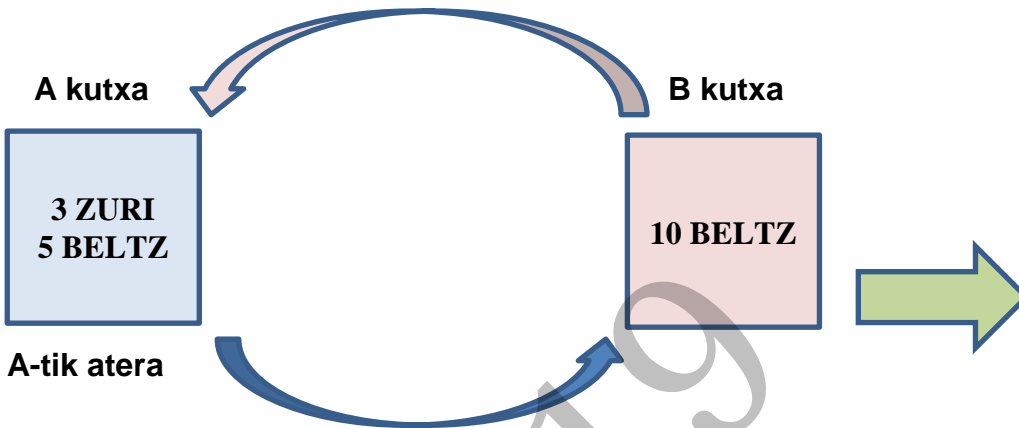
- ✚ Azalera kalkulatzeko, integral mugatu hau ebatziko dugu:



ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

$$A = \int_0^2 [-x^2 + 2x] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} u^2$$

B3 Probabilitate bat kalkulatzeko zuhaitz-diagramaren edo probabilitate totalaren bidez BETI BELTZA (B kutxatik bola beltz bat ateratzen dugu beti, eta A kutxan sartzen dugu)



A-tik, B_A edo Z_A ateratzen dugu, hau da:

B_A = A kutxatik bola beltz bat ateratu, eta B kutxan sartu dugu

Z_A = A kutxatik bola zuri bat ateratu, eta B kutxan sartu dugu

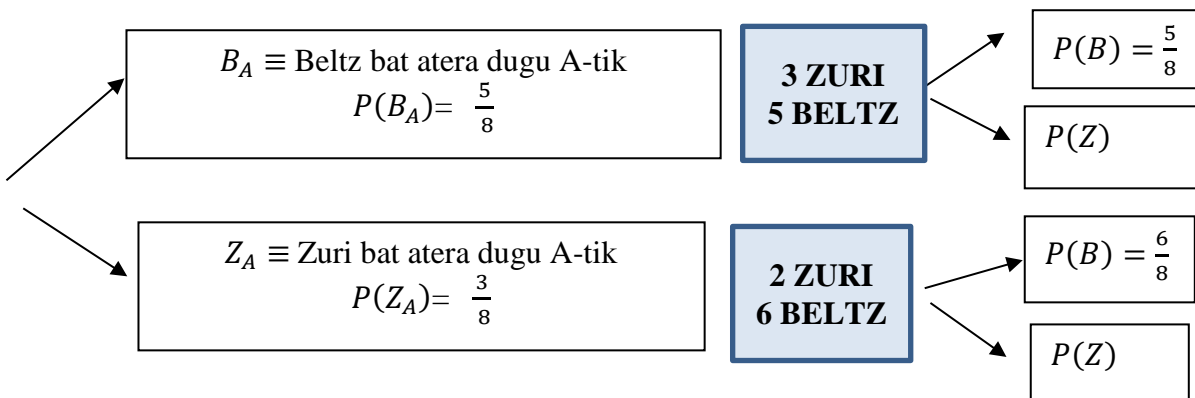
Bola beltz bat ateratzeko probabilitatea kalkulatzeko dugu $\equiv P(B)$

Modu bat: Probabilitate osoa:

$$P(B) = P(B_A) \cdot P(B | B_A) + P(Z_A) \cdot P(B | Z_A)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{43}{64} = 0,672, \text{ hau da } \% 67,2$$

Beste modu bat: Zuhaitz-diagramaren bidez:



$$\Rightarrow P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{43}{64} = 0,672$$

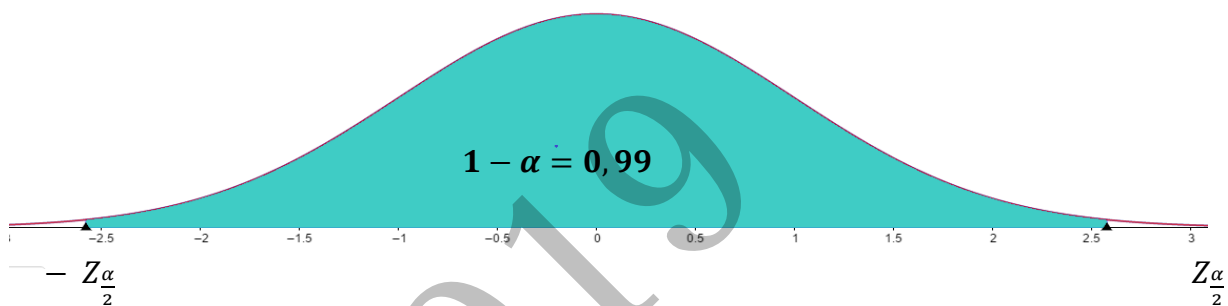
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

B 4 Laginen batezbestekoen banaketei buruzko ariketa. Batezbestekorako konfiantza-tartea. Laginaren elementu kopurua.

Datuak hauek dira:

- Populazioaren batezbestekoa μ eta desbideratze tipikoa $\sigma = 75$
- Laginaren tamaina: $n = 100$
- Laginaren batezbestekoa: $\bar{x} = 250$

a) % 99ko konfiantza-tartea gastuen batezbestekorako:



- Konfiantza-maila: $n_c = 0,99$

$$n_c = 0,99 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

$$\left. \begin{aligned} P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) &= 0,005 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,005 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575 \end{aligned} \right\}$$

- Batezbestekorako konfiantza-tartea:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\Rightarrow \left(250 - 2,575 \frac{75}{\sqrt{100}} ; 250 + 2,575 \frac{75}{\sqrt{100}} \right) = (250 - 19,3125 ; 250 + 19,3125)$$

$$\Rightarrow (230,6875 ; 269,3125)$$

b) Tamainaren lagina, % 99ko konfiantza-mailaz, errore maximoa 10 euro izateko: Batezbestekorako errore maximoa $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ da, hau da, konfiantza-tartearen zabalerraren erdia.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} \leq 10 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 2,575 \frac{75}{10} = 19,3125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 372,97 \Rightarrow n = 373$$

Hau da, **373ko laguneko lagin bat hartu beharko litzateke.**