eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas II

EAU 2018

www.ehu.eus

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.

Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.

Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

El examen consta de cinco ejercicios.

Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.

Solamente se podrán usar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio A2

Dados los puntos $A(3,3,3)$, $B(2,3,4)$, $C(0,0,4)$ y $D(3,0,1)$.

a) ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

b) Calcular a para que el punto $P(a,a,8)$ esté en la recta que pasa por los puntos A y C.

Ejercicio A3

Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{ax}, & x > 1. \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función de a.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx.$$

Ejercicio A5

De todos los números positivos x e y tales que $x + y = 10$ encontrar aquellos para los que el producto $P = x^2\, y$ sea máximo.

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $S(a)$

$$S(a) = \left\{ \begin{array}{lclclcl} x & + & 2y & - & z & = 2 \\ x & + & (a+1)y & - & az & = 2a \\ x & + & ay & + & (a+1)z & = 1 \end{array} \right.$$

a) Discutirlo según los distintos valores de a.

b) ¿Hay solución para $a = 2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

Ejercicio B2

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y a la recta

$$r \equiv \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Ejercicio B3

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de f.

b) Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.

c) ¿Tiene extremos la función f?. En caso afirmativo ¿en que puntos?

Ejercicio B4

Representar el recinto del plano limitado por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y por la recta $x = 1$. Calcular su área.

Ejercicio B5

Si llamamos P a la suma de todos los números pares menores que 1001 y T a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1001, ¿cuánto vale $P - T$?

MATEMATIKA II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

- Estudiar el rango de la matriz mediante el cálculo de los distintos determinantes (1,5 puntos).
- Concluir correctamente con la discusión del rango de la matriz y escribir el resulto final (0,5 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)

- Planteamiento del problema: obtención del plano que contiene a tres puntos y verificación de que el otro punto está en el plano obtenido (1 punto)
- Cálculo correcto del valor del parámetro a para que el punto esté en la recta AC (1 punto)

Problema A.3 (2 puntos)

- Discusión del parámetro a para que la función sea continua en el punto x = 1 (1 punto)
- Discusión del parámetro a para que la función sea derivable en el punto x = 1 (1 punto)

Problema A. 4 (2 puntos)

- Descomposición de la integral racional en pequeñas integrales racionales (1 punto)
- Cálculo correcto de las tres integrales (1 punto)

Problema A.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema (1 punto)
- Obtención de la solución correcta (1 punto)

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

- Cálculo del determinante de la matriz A y discusión para los casos en que el determinante no se anula (0,75 puntos)
- Discusión en los casos a= 0 y a = 1 (0,75 puntos)
- Resolución para el caso a= 2 (0,5 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)

Hay varias formas de resolver el problema. La más usual es calcular el plano que pasa por tres puntos. Pero cualquier otra manera que del resultado correcto es naturalmente válida.

- Planteamiento del problema, Obtención de dos puntos de la recta (0.75 puntos.
- Obtención correcta del plano que pasa por los tres puntos (1.25 puntos)

Problema B.3 (2 puntos)

- Cálculo correcto de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Discusión y obtención de los puntos críticos (0, 5 puntos)
- Obtención de los Intervalos de crecimiento (0,5 puntos)
- Obtención de las asíntotas (0,5 puntos)

Problema B. 4 (2 puntos)

- Dibujo adecuado del recinto como intersección de las dos gráficas y la recta x = 1(1 punto)
- Cálculo del área del recinto mediante la regla de Barrow (1 punto)

Problema B.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema razonando el método
- Obtención correcta de P (0.75 puntos)
- Obtención correcta de T (0,75 puntos)
- Obtención correcta de P-T (0,5 puntos)

OPCION A

SOLUCIÓN A1

Evidentemente el rango de la matriz ha de ser menor o igual que 3 y como hay determinantes distintos de cero de orden 2, se verificará que el Rango(A) será mayor o igual que 2.

Analizaremos si puede ser de rango 3. Los determinantes que se pueden formar, para este caso, son:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & a & 4 \\ -1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a - 12$, al igualarlo a cero nos da a= –6 y a = 2

El segundo determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2a + 2a = 0$,

El tercer determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & a & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$,

El cuarto y último determinante es: $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & a & -2 \end{vmatrix}$, al igualarlo a cero nos da

a = –6 y a = 2

Conclusión si:

1) a = –6 ó a = 2 los cuatro determinantes son cero y el rango(A) =2
2) Mientras que si a es <u>distinto</u> de –6 y 2 el rango(A) =3

SOLUCIÓN A2

a) y b) Sí, están en el mismo plano. Se puede calcular el plano que contiene a los puntos A, B y C, es el plano: 3x-2y+3z=12, por tanto el punto D(3,0,1) pertenece al plano ya que satisface dicha ecuación, en efecto: 3(3)-2.(0)+3.(1)= 12

c) La recta que pasa por A y C, en paramétricas es: (–3t, –3t, t+4)

para que el punto P(a, a, 8) satisfaga la ecuación se ha de cumplir que

–3t = a y además t+4= 8, por tanto t = 4 y a= –12, el punto será por tanto P(–12,–12, 8).

SOLUCIÓN A3

Evidentemente, la función no es continua so a =0. Si a ≠ 0, para que la función sea continua en x= 1 (ya que en los demás puntos no hay problemas) se ha de verificar que $3 - a = 2/a$, de donde tenemos que $a^2 - 3a + 2 = 0$, las soluciones en a son a= 2 y a=1.

Para que la función sea derivable en el punto x=1 ha de ser continua en ese punto y además la derivada por la derecha y por la izquierda en dicho punto han de ser iguales. Por tanto se ha de verificar que para x=1 las dos expresiones correspondientes a las derivadas laterales han de ser iguales $\frac{-2}{ax^2} = -2ax$, resolviendo tenemos que a =±1.

Por tanto, concluyendo en x=1 será derivable si a = 1.

SOLUCIÓN A4

Corresponde a una integral racional, para resolverla tenemos que descomponerla en pequeñas integrales. Como

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Resolviendo tenemos A= –1, B=1 y C= 3.

Por tanto, la integral pedida es igual a:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx = -ln(x) + ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$$

SOLUCIÓN A5

El problema nos lleva a plantear las dos siguientes ecuaciones:

$$x + y = 10$$
$$P = y.x^2$$

De donde $P = 10x^2 - x^3$, el valor máximo se hallará cuando la derivada de la función P(x) se anule. Esto es $P' = 20x - 3x^2 = 0$. Resolviendo nos da x= 0 y x= 20/3, se puede ver efectivamente que en x= 20/3 alcanza el máximo (únicamente hay que verificar que la segunda derivada de P en el punto 20/3 es negativa).

Por tanto, la solución es x= 20/3.

OPCION B

SOLUCIÓN B1

a) Las matrices A y A´ son las siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a+1 & -a & 2a \\ 1 & a & (a+1) & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es igual a 2a(a-1), igualando a cero tenemos que

a= 0, a = 1, por tanto

- Para cualquier número real a distinto a 0 y 1 el sistema es compatible determinado.
- Para a = 0 el rango(A)≠ rango(A´), por tanto, es INCOMPATIBLE
- Para a= 1, el rango(A)= rango(A´) y el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 2 el sistema tiene solución única y es x = –7/4, y= 7/4, z= –1/4.

SOLUCIÓN B2

La recta r en paramétricas es: (2t, 3+t, 1-t).

Para calcular el plano hacen falta tres puntos no alineados. Es claro que el punto P no pertenece a la recta. Calculemos dos puntos de la recta, por ejemplo para t= 0 en la recta obtenemos un punto de la misma, calculando A(0,3,1). Para t= 1 obtenemos el punto B(2,4,0).

Por tanto el plano pedido es el que pasa por los puntos A, B y P(2,-1, 2).

Esto es 3x+4y+10z=22.

SOLUCIÓN B3

a) Las asíntotas verticales son x=2 y x = -2.

Las asíntotas horizontales se obtienen calculando $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2-4} = 1$, Por tanto la asíntota horizontal es y = 1. Asíntotas oblicuas no tiene.

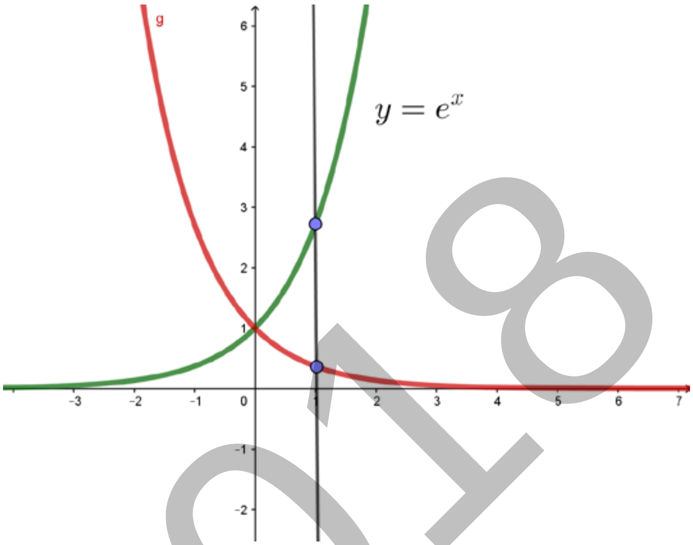
b) Para calcular los intervalos de crecimiento o decrecimiento hay que derivar la función y se tiene que $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}$.

Por tanto será creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decreciente en $(0,2)\cup(2,\infty)$.

c) En el punto x= 0 la función tiene un máximo relativo, es el punto P(0,3/4).

SOLUCIÓN B4

La región está limitada por las dos funciones del dibujo y la recta x=1.



Para calcular el área empleamos la fórmula de Barrow:

$\boldsymbol{A = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\, dx = \left(e + \frac{1}{e} - 2\right)}$ unidades cuadradas

SOLUCIÓN B5

La suma

- De los pares es P= 2+4+…+1000 (son 500 números) = 250.500.
- De los múltiplos de tres es T= 3+…+999 (son 333 números) = 166.833.

Por tanto, P-T= 83.667.