eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas II

EAU 2018

www.ehu.eus

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.

Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.

Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

El examen consta de cinco ejercicios.

Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.

Solamente se podrán usar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Determinar el rango de la matriz $A(a)$ según los valores de a.

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A2

Sea π el plano de ecuación $x+y+z=1$, sea r la recta de ecuaciones paramétricas $\{x=1, y=t, z=t\}$ y sea P el punto $(1,1,0)$.

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a r y que contenga a P.

b) Hallar el punto simétrico de P respecto al plano π.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

Ejercicio A4

Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x^2e^{-3x}dx.$$

Ejercicio A5

Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.

OPCIÓN B

Ejercicio B1

a) Discutir el siguiente sistema $S(a)$ en función de a

$$S(a) = \left\{ \begin{array}{rcccccl} x & + & ay & - & z & = 2 \\ 2x & + & y & + & az & = 0 \\ 3x & + & (a+1)y & - & z & = a-1 \end{array} \right.$$

b) ¿Hay solución para $a = 1$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

Ejercicio B2

Determinar el punto simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x = -1 + t, y = 3 + 2t, z = -1 + 2t\}$.

Ejercicio B3

De la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ se sabe que su gráfica pasa por el punto $(1, 0)$ y que tiene un extremo en $x = 0$ de valor 1.

a) Hallar A, B y C.

b) ¿El extremo situado en el punto $x = 0$ es máximo o es mínimo?

Ejercicio B4

La curva $y = 4x^2$ y la curva $y = 4x - x^2$ delimitan un recinto finito del plano. Dibujar dicho recinto y calcular su área.

Ejercicio B5

Hallar razonadamente el último dígito del número $P = (2018)^{2018}(3)^{2018}$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

- Estudiar el rango en los distintos determinantes (1,5 puntos)
- Concluir correctamente con la discussión del rango de la matriz y escribir el resulto final (0,5 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)

a) Obtención del plano perpendicular a la recta r y que contenga al punto P (0.75 puntos)
b) Obtención del simétrico de P (1.25 puntos)

Problema A.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Discusión de los puntos críticos (0, 5 puntos)
- Obtención de los Intervalos de crecimiento (0,5 puntos)
- Obtención de las asintótas (0,5 puntos)

Problema A. 4 (2 puntos)

- Aplicación de la integración por partes (0, 5 puntos)
- Cálculo correcto de la integral aplicando el método anterior (1, 5 puntos)

Problema A.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema (1 punto)
- Resolución correcta del problema y obtención del área máxima (1 punto)

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

- Cálculo del determinante de la matriz A y discusión para los casos que no anulan el determinante (0,75 puntos)
- Discusión en los casos a = 0 y a = ½ (0,75 puntos)
- Resolución para el caso a = 1 (0,5 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)

- Planteamiento del problema, obtención del plano perpendicular a la recta dada (0.75 puntos)
- Intersección del plano anterior con la recta dada y cálculo del punto simétrico (1.25 punto)

Problema B.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Obtención adecuada de los parámetros A, B,y C imponiendo las condiciones pertinentes (1 punto)
- Discusión y obtención del punto extremo (0,5 puntos)

Problema B. 4 (2 puntos)

- Dibujo adecuado del recinto como intersección de dos parábolas y el cálculo de los puntos de corte de dichas parábolas.(1 punto)
- Cálculo del área del recinto mediante la regla de Barrow (1 punto)

Problema B.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema razonando el método (0.5 puntos)
- Obtención del dígito correspondiente a las unidades de P (1.5 puntos)

OPCION A

SOLUCIÓN A1

Evidentemente el rango de la matriz ha de ser menor o igual que 3 y como hay determinantes distintos de cero de orden 2, se verificará que el Rango(A) será mayor o igual que 2.

Analizaremos si puede ser de rango 3. Los determinantes que se pueden formar, para este caso, son:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = -a(-a^2 - a + 2)$, al igualarlo a cero nos da a =0,a =1 y a = –2

El segundo determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -0 \end{vmatrix} = a^2 - 2a = 0$, de donde a= 0 y a= 2

El tercer determinante es $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2a - 4$, al igualarlo a cero nos da a= 2

El cuarto y último determinante es: $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ a & 2 & -0 \end{vmatrix}$, al igualarlo a cero nos da a = 1 y

a = –2.

Conclusión si:

Como no hay ningún valor de a que anule a la vez los cuatro determinantes, el rango(A) =3.

SOLUCIÓN A2

a) La recta tiene como vector director v(0,1,1), por tanto el plano pedido es : (x-1).0+(y-1).1+(z-0).1= 0, realizando operaciones obtenemos la ecuación del plano , es : y+z= 1
b) Para calcular el simétrico de P, primero calculamos la recta perpendicular al plano dado pasando por P. Es la recta (x=1+t, y= 1+t, z= t). Ahora obtenemos el punto de corte de dicha recta con el plano, es M(2/3, 2/3, -1/3), por tanto el simétrico es : P´(1/3, 1/3, -2/3)

SOLUCIÓN A3

Para estudiar los intervalos de crecimiento hay que derivar la función y estudiar el signo de su derivada.

$$f'(x) = e^{-x}.x.(2-x)$$

- La función será decreciente en la zona $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
- Es creciente en el intervalo (0,2)
- Tiene un mínimo en el punto x= 0. Mínimo (0,0)
- Tiene un máximo en el punto x= 2. Máximo $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$
- No tiene asíntotas verticales.
- Tiene una asíntota horizontal que es y = 0, ya que el límite de la función cuando x tiende a infinito se hace cero
- No tiene asíntotas oblicuas, puesto que f(x)/ x cuando x tiene a infinito se hace cero.

SOLUCIÓN A4

Es una integral que puede hacerse por partes (hay que aplicar dos veces)

$$\int x^2 e^{-3x}\,dx = \frac{-1}{3} x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + C$$

SOLUCIÓN A5

El problema nos lleva a plantear las dos siguientes ecuaciones:

$$A = xy/2$$
$$B = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$

Siendo x e y las dimensiones de los catetos

Poniendo la variable y en función de x tenemos: $2A = x\sqrt{64 - x^2}$,

Para obtener el máximo derivamos la función A(x) e igualamos a cero, nos da $2A' = \sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = 0$, obteniendo como valor positivo $x = 4\sqrt{2}$, puede comprobarse que corresponde a un máximo. El área del triángulo es igual a 16 unidades cuadradas.

OPCION B

SOLUCIÓN B1

a) Las matrices A y A´ son las siguientes

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 2 & 1 & a\\ 3 & a+1 & -1\end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 2 & 1 & -a & 0\\ 3 & a+1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$$

El determinante de A es igual a a(2a-1), igualando a cero tenemos que

a= 0, a =1/2, por tanto

- Para cualquier número real a distinto a 0 y 1/2 el sistema es compatible determinado.
- Para a = 0 el rango(A)≠ rango(A´), por tanto, es Incompatible
- Para a= 1/2, el rango(A) ≠ rango(A´) y el sistema es Incompatible

b) Para a= 1 el sistema tiene solución única y es x = –6, y= 10, z= 2

SOLUCIÓN B2

En primer lugar calculamos el plano perpendicular a la recta dada que contiene al punto (el vector normal del plano es v(1,2,2) y el plano pasa por el punto A). Calculando el plano es: x+2y+2z+15= 0

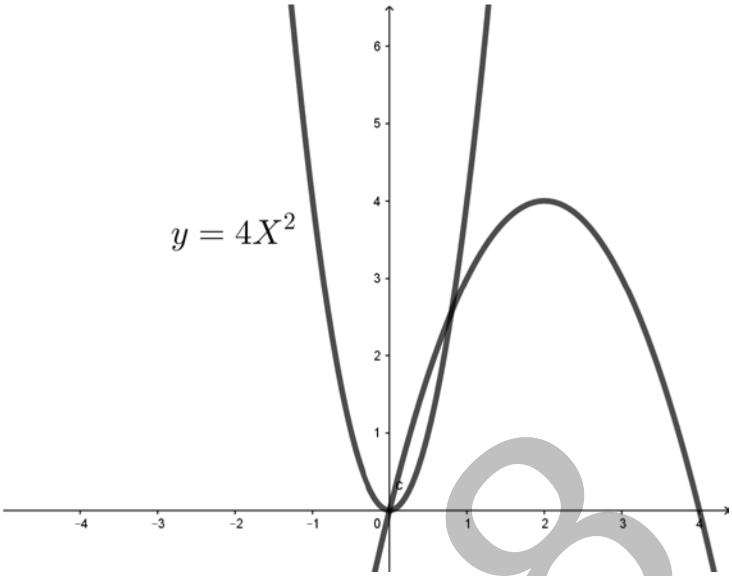
Hallamos la intersección de la recta y el plano calculado, nos da el punto M(-3,-1,-5). **Por tanto el punto simétrico de A será A´(-3,-3,-3)**

SOLUCIÓN B3

a) Por pasar la gráfica por el punto (1,0) se cumplirá
1+A+B+C= 0
Como $y' = 3x^2 + 2Ax + B$
Por tener un extremo en x= 0, se verificará B= 0
Por pasar por el (0,1), se verificará C= 1
Por tanto, A=-2, C= 1 y B= 0
La ecuación será $y = x^3 - 2x^2 + 1$

b) La segunda derivada es igual a y´´ = 6x-4, por tanto, en x= o hay un máximo.

SOLUCIÓN B4



Las dos gráficas se cortan en los puntos x= 0 y x= 4/5

Por tanto el área pedida es $\boldsymbol{A = \int_0^{4/5}\left((4x - x^2) - 4x^2\right)dx = 32/75}$

SOLUCIÓN B5

El número se puede poner como $\boldsymbol{P = 2018^{2018}3^{2018} = 6054^{2018}}$

Si nos preocupamos por las primeras potencias del 4, comenzando por el 4, Obtenemos 4, 16, 64, 216, 864,… como vemos se van repitiendo sus terminaciones en ciclos de 2 , por tanto el último dígito será 6, ya que dicho valor coincide con el dígito de las unidades de $\boldsymbol{4^2}$ que evidentemente es 6.