eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II

USE 2018

www.ehu.eus

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.

Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.

Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

El examen consta de cinco ejercicios.

Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.

Solamente se podrán usar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 Ariketa

Eman $A(a)$ matrizearen heina a parametroaren arabera:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A2 Ariketa

Izan bitez $x+y+z=1$ ekuazioa duen π planoa, $\{x=1, y=t, z=t\}$ ekuazio parametrikotako r zuzena eta $P\ (1,1,0)$ puntua.

a) Kalkulatu r-rekiko perpendikularra den eta P puntua duen planoaren ekuazioa.

b) Kalkulatu P puntuaren π planoarekiko puntu simetrikoa.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^2e^{-x}$ funtzioa. Aztertu gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta maximo, minimo eta asintoten existentzia.

A4 Ariketa

Kalkulatu integral mugagabe hau:

$$\int x^2e^{-3x}dx.$$

A5 Ariketa

Eman triangelu angeluzuzen batek izan dezakeen azalera maximoa haren hipotenusaren neurria 8 bada.

B AUKERA

B1 Ariketa

a) Eztabaidatu $S(a)$ sistema a parametroaren arabera:

$$S(a) = \begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$$

b) Ba al dago soluzioarik $a = 1$ baliorako? Erantzuna baiezkoa bada, eman soluzioa. Ezezkoa bada, erantzuna arrazoitu.

B2 Ariketa

Eman $A(-3, 1, -7)$ puntuaren puntu simetrikoa $\{x = -1 + t, y = 3 + 2t, z = -1 + 2t\}$ ekuazio parametrikoak dituen r zuzenarekiko.

B3 Ariketa

Jakinik $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ funtzioaren grafikoa $(1, 0)$ puntutik pasatzen dela eta $x = 0$ puntuan 1 balioa hartzen duen muturra duela,

a) Kalkulatu A, B eta C.

b) $x = 0$ muturra zer da, maximoa ala minimoa?

B4 Ariketa

$y = 4x^2$ eta $y = 4x - x^2$ kurbek planoko eremu finitu bat mugatzen dute. Egin eremuaren marrazkia, eta kalkulatu haren azalera.

B5 Ariketa

Kalkulatu, erantzuna arrazoituz, $P = (2018)^{2018}(3)^{2018}$ zenbakiaren azken digitua.

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ariketa (2 puntu)

- Heina aztertzea determinante guztietan (1,5 puntu)
- Matrizearen heinaren eztabaidari amaiera zuzena ematea eta azken emaitza idaztea (0,5 puntu)

A.2 ARIKETA (2 puntu)

a) *P* puntua daukan eta *r* zuzenarekiko perpendikularra den planoa lortzea (0,75 puntu).
b) *P*-ren simetrikoa lortzea (1,25 puntu)

A.3 ARIKETA (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea (0,5 puntu)
- Puntu kritikoak eztabaidatzea (0,5 puntu)
- Goratze-tarteak lortzea (0,5 puntu)
- Asintotak lortzea (0,5 puntu)

A.4 ARIKETA (2 puntu)

- Zatikako integrazioa aplikatzea (0,5 puntu)
- Integrala ondo kalkulatzea aurreko metodoa aplikatuz (1,5 puntu)

A.5 ARIKETA (2 puntu)

- Problema planteatzea (1 puntu)
- Problema modu egokian ebaztea eta gehieneko azalera lortzea (1 puntu)

B AUKERA

B.1 ARIKETA (2 puntu)

- *A* matrizearen determinantea kalkulatzea, eta eztabaidatzea zer kasuk ez duten ezeztatzen determinantea (0,75 puntu)
- *a* = 0 eta *a* = ½ kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu)
- *a* = 1 kasurako ebaztea (0,5 puntu)

B.2 ARIKETA (2 puntu)

- Problema planteatzea eta emandako zuzenarekiko perpendikularra den planoa lortzea (0,75 puntu)
- Aurreko planoaren eta emandako zuzenaren arteko intersekzioa kalkulatzea (1,25 puntu)

B.3 ARIKETA (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea (0,5 puntu)
- *A*, *B* eta *C* parametroak ondo lortzea dagozkion baldintzak jarrita (1 puntu)
- Mutur-puntua eztabaidatzea eta lortzea (0,5 puntu)

B.4 ARIKETA (2 puntu)

- Ondo marraztea esparrua bi parabolaren arteko intersekzio gisa, eta parabola horien ebakitze-puntuak kalkulatzea (1 puntu)
- Esparruaren azalera lortzea Barrow-ren erregela aplikatuz (1 puntu)

B.5 ARIKETA (2 puntu)

- Problema metodoa arrazoituz planteatzea (0,5 puntu)
- *P*-ren unitateei dagokien digitua lortzea (1,5 puntu)

A AUKERA

EBAZPENA A1

Matrizearen heinak 3 edo txikiagoa izan behar du, jakina, eta, zero ez diren 2 ordenako determinante batzuk badaudenez, egiaztatuko da *A*-ren heina 2 edo handiagoa dela.

Aztertuko dugu ea 3 heinekoa izan daitekeen. Kasu honetarako, determinante hauek eratu daitezke:

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a+1} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-a(-a^2 - a + 2)}$; zerora berdinduta, hau emango digu: *a* = 0, *a* = 1 eta *a* = –2

Bigarren determinantea $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-0} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a^2 - 2a = 0}$ da, eta hortik: *a* = 0 eta *a* = 2

Hirugarren determinantea $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a+1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \boldsymbol{2a - 4}$ da; zerora berdintzean, hau emango digu: *a* = 2

Laugarren eta azken determinantea hau da: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a+1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{2} & \mathbf{-0} \end{vmatrix}$; zerora berdinduta, hau emango du: *a* = 1 eta *a* = –2

Konklusioa:

Aldi berean lau determinanteak zero izatea lortzen duen baliorik ez dagoenez, *A*-ren heina 3 izango da.

EBAZPENA A2

a) Zuzenaren bektore zuzentzailea *v*(0,1,1) da; beraz, hau da eskatutako planoa: (*x* – 1).0 + (*y* – 1).1 + (z – 0).1 = 0; eragiketak eginez, planoaren ekuazioa lortuko dugu: *y* + *z* = 1

b) *P*-ren simetrikoa kalkulatzeko, *P*-tik pasatzen den eta emandako planoarekiko perpendikularra den zuzena kalkulatuko dugu lehenengo.

Zuzen hau da: (*x* = 1 + *t*, *y* = 1 + *t*, *z* = *t*). Orain, zuzen horren eta planoaren arteko ebakitze-puntua lortuko dugu. Hau da: *M*(2/3, 2/3, –1/3); beraz, hau izango da simetrikoa:

P´(1/3, 1/3, –2/3)

EBAZPENA A3

Goratze-tarteak aztertzeko, funtzioa deribatu egin behar da, eta deribatuak zer zeinu duen aztertu.

$$f'(x) = e^{-x}.x.(2-x)$$

- Funtzioa beherakorra izango da $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ zonan
- Gorakorra da (0,2) tartean
- Minimo bat du *x* = 0 puntuan. Minimoa (0,0)
- Maximo bat du *x* = 2 puntuan. Maximoa $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$
- Ez du asintota bertikalik.
- Asintota horizontal bat du, *y* = 0, zeren eta funtzioaren limitea zero baita *x*-k infinitura jotzen duenean.
- Ez du asintota zeiharrik, zeren eta *f*(*x*)/*x* zero bihurtzen baita *x*-k infinitura jotzen duenean.

EBAZPENA A4

Zatika egin daitekeen integral bat da (bi aldiz aplikatu behar da)

$$\int x^2 e^{-3x}\,dx = \frac{-1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$$

EBAZPENA A5

Problema aztertuta, bi ekuazio hauek planteatzen dira:

$$A = xy/2$$
$$8 = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$

Katetoen dimentsioak *x* eta *y* izanik.

y aldagaia *x*-ren funtzio gisa jarrita, hau izango dugu: $2A = x\sqrt{64-x^2}$,

Maximoa lortzeko, *A*(*x*) funtzioa deribatuko dugu, eta zerora berdinduko. $2A' = \sqrt{64-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}$ = 0 ematen digu, eta balio positibo gisa $x = 4\sqrt{2}$ lortzen da; egiaztatu daiteke maximo bati dagokiola. Triangeluaren azalera 16 unitate karratu da.

B AUKERA

EBAZPENA B1

a) *A* eta *A´* matrizeak hauek dira:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 2 & 1 & a\\ 3 & a+1 & -1\end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 2 & 1 & -a & 0\\ 3 & a+1 & -1 & a-1\end{pmatrix}$$

A-ren determinantea $a(2a-1)$ da; zerora berdinduta:

$a = 0$, $a = 1/2$. Beraz:

- 0 eta 1/2 ez den edozein *a* zenbaki errealetarako, sistema bateragarri determinatua da.
- $a = 0$ denean, hein(A) ≠ hein(A´); beraz, bateraezina da
- $a = 1/2$ denean, hein(A) ≠ hein(A´), eta sistema bateraezina da

b) $a = 1$ denean, sistemak soluzio bakarra du: $x = -6$, $y = 10$, $z = -2$

EBAZPENA B2

Hasteko, kalkulatu behar dugu zer plano den emandako zuzenarekiko perpendikularra dena eta puntu hori daukana (planoaren bektore normala *v*(1,2,2) da, eta planoa *A* puntutik pasatzen da). Kalkuluak eginda, hau da planoa:

$x + 2y + 2z + 15 = 0$

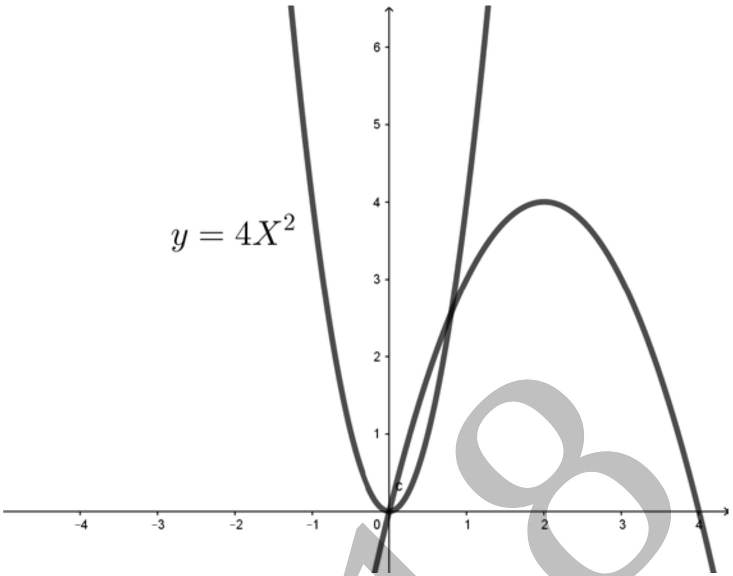
Zuzenaren eta kalkulatutako planoaren arteko intersekzioak *M*(-3,-1,-5) puntua ematen digu. Beraz, *A*-ren puntu simetrikoa hau izango da: *A´*(–3,–3,–3)

EBAZPENA B3

a) Grafikoa (1,0) puntutik pasatzen denez, hau beteko da:
   1 + A + B + C = 0
   $y' = 3x^2 + 2Ax + B$ izanik.
   Mutur bat du $x = 0$ denean; beraz, $B = 0$ beteko da.
   (0,1) puntutik pasatzen denez, hau beteko da: $C = 1$
   Beraz: $A = -2$, C = 1 eta B = 0.
   Ekuazioa hau izango da: $y = x^3 - 2x^2 + 1$

b) Bigarren deribatua $y'' = 6x - 4$ da; beraz, $x = 0$ denean, maximo bat dago.

EBAZPENA B4



Bi grafikek *x* = 0 eta *x* = 4/5 puntuetan ebakitzen dute elkar.

Horrenbestez, hau da eskatutako azalera: $A = \int_0^{4/5}\left((4x - x^2) - 4x^2\right)dx = 32/75$

EBAZPENA B5

Zenbakia honela jar daiteke: $P = 2018^{2018}3^{2018} = 6054^{2018}$

4ren lehenengo berreturak hartuz gero, 4tik hasita, hauek lortuko ditugu: 4, 16, 64, 216, 864,… Ikusten da amaierak errepikatuz doazela 2ko ziklotan; beraz, azken digitua 6 izango da, zeren eta balio hori bat baitator 4^2-ren unitateen digituarekin, zeina —jakina— 6 baita.