Matemáticas II

· BACHILLERATO

· FORMACIÓN PROFESIONAL

· CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

Evaluación para el Acceso a la Universidad

UPV/EHU

2017

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Sepodrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m. (NO es necesario resolverlo)

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x + my + z &= 2 \\ 3x + y - mz &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio A2

Dado el punto M(1,-3, 7), obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos A(1,-3, 4) y B(0,-4, 1).

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$

a) Calcula A, B, y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa x = 0 es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2 y que corta al eje *OX* en x =1.
b) Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

Ejercicio A4

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo A(0,0), B(0, 2), C(4,2) , D(4, 0) en dos recintos.

a) Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo ABCD.
b) Calcula el área de cada uno de los recintos.

Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de *m* la matriz *A* posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m.

b) Hallar el valor *m* para que se cumpla la igualdad $\boldsymbol{A}^2 = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio B2

Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto A (14, 3, 3).

Ejercicio B3

Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

a) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente?
b) Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo hallarlos.
c) Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto cuya abcisa es x = 0.

Ejercicio B4

Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx$

Ejercicio B5

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.
Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

- Obtención de la matriz del sistema, cálculo de su determinante y obtención de los valores que lo anulan (1 punto)
- Discusión de cada caso .
  - El caso $m \neq 0$ (0, 4 puntos)
  - El caso $m = 0$ (0, 3 puntos)
  - El caso $m= 2$ (0, 3 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)

- Obtención del plano perpendicular a la recta dada u otro procedimiento alternativo (1 punto)
- Obtención del punto simétrico (1 punto)

Problema A.3 (2 puntos)

- Planteamiento de todas las condiciones y obtención correcta de los parámetros A, B y C (1,25 puntos)
- Obtención de los puntos críticos y la discusión de la naturaleza de cada uno de ellos(0,75 puntos)

Problema A. 4 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- Dibujo de la parábola y el rectángulo que delimita los dos recintos (1 punto)
- Cálculo de las áreas de los recintos aplicando la regla de Barrow(1 punto)

Problema A.5 (2 puntos)

- Obtención de las matrices A^n , observando las regularidades y explicando adecuadamente la pauta observada (1.25 puntos)
- Cálculo de la matriz pedida (0,75 puntos)

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)
- Resolución del determinante de la matriz y razonar cuando la matriz es inversible(0,5 puntos)
- Estudiar el rango en todos los casos(0,75 puntos).
- Cálculo del valor m de manera correcta (0,75 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)
- Planteamiento del problema : obtención del plano que pasa por A y perpendicular a r (1 punto)
- Interesección de dicho plano con la recta r, obteniendo un puntoP (0,5 puntos)
- Cálculo de la recta que pasa por A y P, obteniendo la recta pedida.(0,5 puntos)

Problema B.3 (2 puntos)
- Obtención del dominio(0,25 puntos)
- Obtención de la derivada de la función (0,25 puntos)
- Obtención adecuada de los intervalos de crecimiento y decrecimiento(0, 5 puntos)
- Razonar respecto a la existencia de los máximos y minimos de la función (0,5 puntos)
- Cálculo adecuado de la recta tangente en el punto x= 0 (0,5 puntos)

Problema B. 4 (2 puntos)
- Descomponer adecuadamente la integral en fracciones simples (1 punto)
- Cálculo adecuado de las tres pequeñas integrales (1 punto)

Problema B.5 (2 puntos)
- Planteamiento del problema mediante un sistema de ecuaciones (1 punto)
- Resolución correcta del sistema (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m (NO es necesario resolverlo en ningún caso)

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x + my + z &= 2 \\ 3x + y - mz &= 3 \end{aligned}$$

Solución

El determinante del sistema es igual a. $2m(2-m)$, igualando a cero obtenemos los valores m= 0 y m =2

Por tanto

- para m ≠ 0, 2 El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO
- Para m = 0 , el rango de la matriz es 2, y el rango de matriz ampliada es 2, por tanto al ser el rango menor que el número de incógnitas (2<3) , el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO y en este caso necesita un parámetro para poder resolverlo.
- Para m = 2, el rango de la matriz es 2, mientras que el rango de la matriz ampliada es 3. Al ser rangos distintos el sistema es INCOMPATIBLE

Ejercicio A2

Dado el punto M(1,-3, 7), obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos A(1,-3, 4) y B(0,-4, 1)

Solución

Obtenemos el plano que pasa por el punto M y es perpendicular a la recta dada. Por tanto el vector director de la recta coincide con el vector normal del plano.

Al ser vector director de la recta **(1, 1, 3**), el plano será x+y+3z-19 = 0.

Ahora hallamos el punto proyección de M sobre la recta, que coincidirá con la intersección del plano hallado y la recta dada. La ecuación de la recta en paramétricas es : $\begin{bmatrix} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 3t \end{bmatrix}$. Por tanto el punto proyección de M sobre la recta será M'(20/11, -24/11, 71/11).

Y para finalizar, el punto simétrico, utilizando la fórmula del punto medio nos da M''(29/11, -15/11, 65/11)

Ejercicio A3

Sea la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$

a) Calcula A, B, y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa x = 0 es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x =2 y que corta al eje X en x =1.
b) Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

Solución
a) La derivada de f es : $f' = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx + C$
Al imponer la primera condición nos da C = 0
De la segunda condición : $f'(2) = 4.2^3 + 3A.2^2 + 4B + C = 0$, por tanto 3A + B = -8
De la tercera condición $f(1) = 0$; por tanto A+B= - 8
Resolviendo obtenemos A = 0 y B= -8
Luego la función es : $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

c) Calculamos su derivada y la igualamos a cero para obtener los máximos, mínimos.

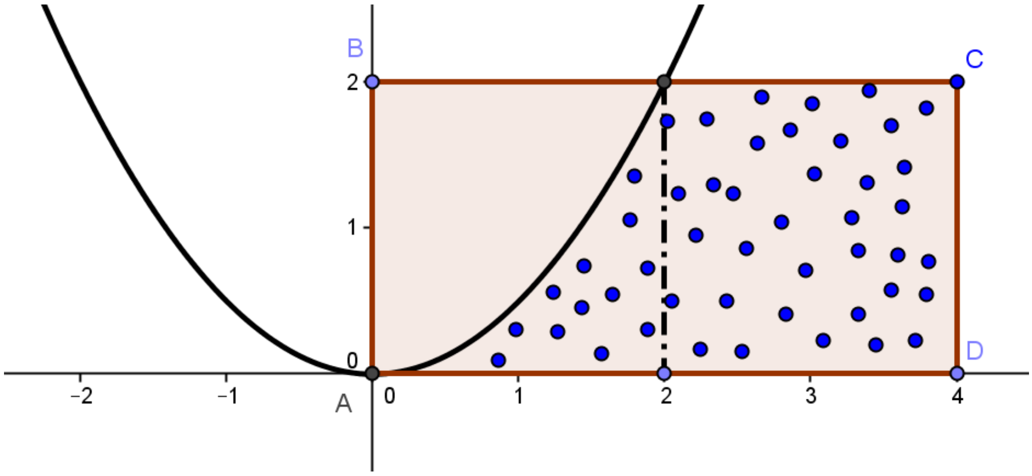
$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0$$

Obtenemos tres raíces x = 0 (máximo), x = 2(mínmo) y x = - 2(minimo). Los puntos son : máximo (0, 7) y mínimos (2, 9) y (-2,-9)

Ejercicio A4

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ **divide al rectángulo A(0,0), B(0, 2), C(4,2) , D(4, 0) en dos recintos.**

a) Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo ABCD
b) Calcula el área de cada uno de los recintos.



Para resolverlo necesitamos el punto de corte de la recta y = 2 con la parábola, nos da x = 2 y x = -2, nos interesa únicamente el valor x =2.

El recinto (no punteado) tendrá por área : $4-\int_0^2 0.5x^2dx = 4-\frac{8}{6}=\frac{8}{3}$, mientras que

el recinto punteado tendrá por área: $8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} **de la matriz** $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

Solución:

$A^2 = A.A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, si nos damos cuenta es la matriz identidad cambiada de signo, esto es $A^2=-I_2$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}A = -A$$

$$A^4 = A^3.A = -A.A = -A^2 = I_2$$

...

$$A^{2017} = A^{4(504)+1} = (A^4)^{504}.A = I_2.A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

Ejercicio B1

Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

c) ¿Para qué valores m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m.

d) Hallar el valor m para que se cumpla la igualdad $A^2=4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Solución

a) Para que sea inversible la matriz A se ha de cumplir que el determinante de su matriz ha de ser distinto de cero. Por tanto se tiene que verificar que $-2m^2 \neq 0$
Por tanto la matriz A posee inversa para todos los valores m distintos de cero.

- Para m distinto de cero el rango de la matriz es 3.
- Para m = 0 la matriz tiene rango 1, como fácilmente se ve, pues todos los menores de orden 2 son nulos.

c) La matriz

$$A^2=\begin{pmatrix} m^2 & -2m+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+m & m^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Igualando términos obtenemos que el único valor posible es m = 2(el valor m=-2 no sirve pues no cumple la condición -2+m = 0).

Ejercicio B2

Calcula la ecuación de una recta que corte perpendicularmente a la recta $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$ **y que pase por el punto A (14, 3, 3).**

Solución
Hay varias maneras de afrontar el problema.
Una es la siguiente**:** Un punto P genérico de la recta r tiene por condiciones:

$$\begin{cases} x=2t \\ y=3-2t \\ z=1+3t \end{cases}$$

Por tanto el vector **PA**, tiene por ecuaciones: (2t-14, -2t, 3t-2)

Ahora imponemos la condición que los vectores **PA** y el vector director de la recta sean perpendiculares(su producto escalar será cero). Por tanto **(2t-14, -2t, 3t-2).(2,-2,3)** = 0 , de donde t = 2, así calculamos el punto P que cumple la condición del problema,resolviendo nos da P(4, -1, 7) . Sabiendo P obtenemos el vector director de la recta pedida, esto es : **PA =(-10, -4, 4).**

Y por último obtenemos la recta pedida: $s \equiv \frac{x-14}{-10} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-3}{4}$

También podríamos calcular el plano que pasa por A y perpendicular a r. Calcular posteriormente la intersección de dicho plano y la recta r, para así calcular el punto P y obrar después de la misma manera que el apartado anterior.

Ejercicio B3

Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

a) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente la función?

b) Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo hallarlos.

c) Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto x = 0 .

Solución

d) La función No existirá cuando el denominador se hace nulo, por tanto no existe para x = 1 y x = -1. El dominio es : $D = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

   La derivada de la función es: $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, como puede verse siempre es positiva, luego la función es creciente en todo su dominio.

e) Al no anularse nunca la primera derivada NO tiene ni máximos ni mínimos.

f)

g) La recta tangente en el punto (0, 0) tiene por pendiente 1, luego será la recta y = x

Ejercicio B4

Resolver la siguiente integral

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx$$

Solución

Factorizando el denominador y descomponiendo en fracciones, tenemos:

$$\frac{x^2+5}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Calculando los coeficientes tenemos. A = 5 , B = - 4, C = 6

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx = 5\ln x - 4\ln(x-1) - \frac{6}{x-1} + Cte$$

Ejercicio B5

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros.
Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.
Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

Solución
Llamando X, Y , Z el número de viajeros que pagan respectivamente el billete entero, con descuento del 20% y con descuento del 50% podemos plantear:

$$\begin{aligned}
&X + Y + Z = 60 \\
&1.2X + (0.8)(1.2)Y + 0.5(1.2)Z = 46.56 \\
&Z = 2(X + Y)
\end{aligned}$$

Resolviendo, X= 14, Y= 6; Z = 40.