

Matematika II

- BATXILERGOA
- LANBIDE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA ZIKLOAK



**Unibertsitatera
Sartzeko Ebaluazioa**

UPV/EHU

2017



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2017ko EKAINA

MATEMATIKA II

EVALUACION DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

JUNIO 2017

MATEMÁTICAS II

***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

***Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Sepodrán utilizar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 Ariketa

Eztabaidatu sistema hau m parametroaren balioen arabera (EZ da beharrezkoa ebaztea)

$$2x + y - z = 1$$

$$x + my + z = 2$$

$$3x + y - mz = 3$$

A2 Ariketa

$M(1, -3, 7)$ puntua emanda, lor ezazu haren simetrikoa $A(1, -3, 4)$ eta $B(0, -4, 1)$ puntuetatik pasatzen den zuzenarekiko.

A3 Ariketa

Har dezagun $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$ funtzioa:

a) Kalkula ezazu A , B , eta C , jakinik $x = 0$ abzisako puntuan funtzioaren zuzen ukitzea horizontala dela, $x = 2$ abzisako puntuan mutur erlatibo bat duela eta, gainera, OX ardatza ebakitzen duela $x = 1$ denean.

b) Lortutako balioetarako, kalkula itzazu funtzioaren maximoak eta minimoak.

A4 Ariketa

$y = \frac{1}{2}x^2$ kurbak bi esparrutan zatitzen du $A(0,0)$, $B(0, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, 0)$ laukizuzena.

a) Marraztu ezazu funtzioaren grafikoa eta ABCD laukizuzena.

b) Kalkula ezazu esparruetako bakoitzaren azalera.

A5 Ariketa

Kalkula ezazu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearen A^{2017} berretura.

B1 Ariketa

Matrize hau emanda: $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) m -ren zer baliotarako du alderantzizkoa A matrizeak? Aztertu matrizearen heina m parametroaren arabera.

b) Aurki ezazu m -ren zer baliotarako betetzen den berdintza hau: $A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B2 Ariketa

Kalkula ezazu $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ zuzena perpendikularki ebakitzen duen eta $A(14, 3, 3)$ puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.

B3 Ariketa

Funtzio hau emanda: $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- Zein da funtzioaren eremua? Zer tartetan da gorakorra?
- Arrazoitu ea maximorik eta minimorik duen. Baiezkoan, aurki itzazu.
- Kalkulatu kurba horrek $x = 0$ abzisako puntuan duen zuzen ukitzailea.

B4 Ariketa

Kalkula ezazu integral hau: $\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

B5 Ariketa

Autobus bat hiru motatako 60 bidaiari garraiatzen ari da. Bidaiari batzuek txartel osoa ordaindu dute, hau da, 1,2 euro. Beste bidaiari batzuek % 80 ordaindu dute, eta beste batzuek % 50. Autobusak, guztira, 46,56 euro bildu ditu. Kalkula ezazu zenbat bidaiari dauden mota bakoitzetik, jakinik deskonturik handiena duten bidaiarien kopurua gainerako bidaiarien kopurua halako bi dela.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ariketa (2 puntu)

- Sistemaren matrizea lortzea, haren determinantea kalkulatzeko eta zehazteko zer baliok ezeztatzen duten determinantea (1 puntu)
- Kasu bakoitza eztabaidatzea.
 - $m \neq 0$ kasua (0,4 puntu)
 - $m = 0$ kasua (0,3 puntu)
 - $m = 2$ kasua (0,3 puntu)

A.2 ariketa (2 puntu)

- Emandako zuzenaren plano perpendikularra lortzea edo beste prozedura alternatiboren bat (1 puntu)
- Puntu simetrikoa lortzea (1 puntu)

A.3 ariketa (2 puntu)

- Baldintza guztiak planteatzea eta A, B eta C parametroak zuzen lortzea (1,25 puntu)
- Puntu kritikoak lortzea eta haietako bakoitzaren izaera eztabaidatzea (0,75 puntu)

A.4 ariketa (2 puntu)

Probleman puntuak lortzeko, hau hartuko da kontuan:

- Parabola eta bi esparruak zehazten dituen laukizuzena marraztea (1 puntu)
- Esparruen azalera kalkulatzeko Barrow-ren erregela aplikatuz (1 puntu)

A.5 ariketa (2 puntu)

- A^n matrizeak lortzea, erregulartasunei erreparatuz eta modu egokian azalduz behatutako araua (1,25 puntu)
- Eskatutako matrizea kalkulatzeko (0,75 puntu)



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B AUKERA

B.1 ariketa (2 puntu)

- Matrizearen determinantea ebaztea eta matrizeak alderantzizkoa noiz duen arrazoitzea (0,5 puntu)
- Heina kasu guztietan aztertzea (0,75 puntu)
- m -ren balioa zuzen kalkulatzeko (0,75 puntu)

B.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea: A -tik pasatzen den eta r -rekiko perpendikularra den plano lortzea (1 puntu)
- Plano horren eta r zuzenaren arteko ebakipuntua kalkulatzeko, P puntu bat lortuz (0,5 puntu).
- A -tik eta P -tik pasatzen den zuzena kalkulatzeko eta, hala, eskatutako zuzena lortzea (0,5 puntu)

B.3 ariketa (2 puntu)

- Eremua lortzea (0,25 puntu)
- Funtzioaren deribatua lortzea (0,25 puntu)
- Goratze- eta beheratze-tarteak modu egokian lortzea (0,5 puntu)
- Funtzioaren maximo eta minimoen existentziari buruz arrazoitzea (0,5 puntu)
- $x = 0$ puntuan ukitzailea den zuzena modu egokian kalkulatzeko (0,5 puntu)

B.4 ariketa (2 puntu)

- Integrala frakzio sinpletan ondo deskonposatzea (1 puntu)
- Hiru integral txikiak modu egokian kalkulatzeko (1 puntu)

B.5 ariketa (2 puntu)

- Problema ekuazio-sistema baten bidez planteatzea (1 puntu)
- Problema zuzen ebaztea (1 puntu)



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPENAK

A AUKERA

A.1 ariketa

Eztabaidatu sistema hau m parametroaren balioen arabera (EZ da beharrezkoa ebaztea)

$$\begin{aligned}2x + y - z &= 1 \\x + my + z &= 2 \\3x + y - mz &= 3\end{aligned}$$

Ebazpena

Hau da sistemaren determinantea: $2m(2-m)$; zerora berdinduta, $m = 0$ eta $m = 2$ balioak lortuko ditugu.

Beraz:

- $m \neq 0, 2$ kasuan, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.
- $m = 0$ denean, matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduaren heina 2 da; beraz, heina txikiagoa da ezezagunen kopurua baino ($2 < 3$), eta, horrenbestez, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da, eta, kasu horretan, parametro bat behar da ebatzi ahal izateko.
- $m = 2$ denean, matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena, berriz, 3. Heinak desberdinak direnez, sistema BATERAEZINA da.

A.2 ariketa

$M(1,-3, 7)$ puntua emanda, lor ezazu haren simetrikoa $A(1,-3, 4)$ eta $B(0,-4, 1)$ puntuetatik pasatzen den zuzenarekiko.

Ebazpena

M puntutik pasatzen den eta emandako zuzenarekiko perpendikularra den planoak lortuko dugu. Beraz, zuzenaren bektore zuzentzailea bat dator planoaren bektore normalarekin.

Zuzenaren bektore zuzentzailea $(1, 1, 3)$ denez, hau izango da planoak:

$$x + y + 3z - 19 = 0.$$

Orain, M -ren zuzenaren gaineko proiektzio-puntua aurkituko dugu; puntu hori bat etorriko da aurkitutako planoaren eta emandako zuzenaren arteko ebakipuntuarekin.

Hau da zuzenaren ekuazioa forma parametrikokoa: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$. Beraz, hau izango da

M -ren zuzenaren gaineko proiektzio-puntua: $M'(20/11, -24/11, 71/11)$.

Eta, amaitzeko, hau izango da puntu simetrikoa, erdiko puntuaren formula erabiliz: $M''(29/11, -15/11, 65/11)$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

A.3 ariketa

Har dezagun $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$ funtzioa:

- a) Kalkula ezazu **A**, **B**, eta **C**, jakinik $x = 0$ abzisako puntuan funtzioaren zuzen ukitzailea horizontala dela, $x = 2$ abzisako puntuan mutur erlatibo bat duela eta, gainera, **X** ardatza ebakitzen duela $x = 1$ denean.
- b) Lortutako balioetarako, kalkula itzazu funtzioaren maximoak eta minimoak.

Ebazpena

a) Hau da f -ren deribatua: $f' = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx + C$

Lehen baldintza ezarrita, hau lortzen da: $C = 0$

Bigarren baldintzatik: $f'(2) = 4 \cdot 2^3 + 3A \cdot 2^2 + 4B + C = 0$; beraz: $3A + B = -8$

Hirugarren baldintzatik: $f(1) = 0$; beraz: $A + B = -8$

Ebatzita, hau lortzen da: $A = 0$ eta $B = -8$.

Beraz, hau da funtzioa: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

- b) Haren deribatua kalkulatu eta zerora berdinduko dugu maximoak eta minimoak lortzeko.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0$$

Hiru erro lortuko ditugu $x = 0$ (maximoa), $x = 2$ (minimoa) eta $x = -2$ (minimoa).
Hauek dira puntuak: maximoa $(0, 7)$ eta minimoak $(2, 9)$ eta $(-2, -9)$.

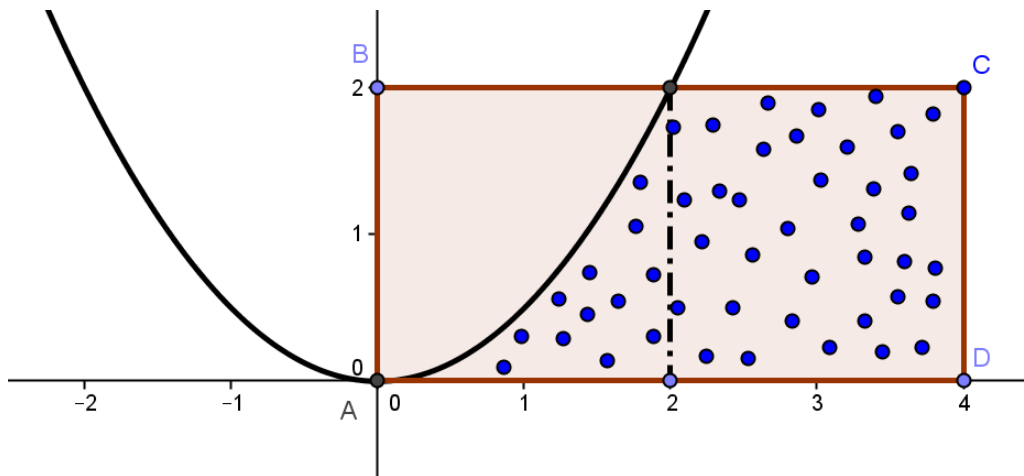
A.4 ariketa

$y = \frac{1}{2}x^2$ kurbak bi esparrutan zatitzen du **A(0,0)**, **B(0, 2)**, **C(4, 2)**, **D(4, 0)**

laukizuzena.

- a) Marraztu ezazu funtzioaren grafikoa eta ABCD laukizuzena.
b) Kalkula ezazu esparruetako bakoitzaren azalera.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK



Ebazteko, jakin behar dugu zein den $y = 2$ zuzenaren eta parabolaren arteko ebakipuntua. $x = 2$ eta $x = -2$ ematen digu, eta $x = 2$ balioa bakarrik interesatzen zaigu.

Punturik gabeko esparruaren azalera hau izango da: $4 - \int_0^2 0.5x^2 dx = 4 - \frac{8}{6} = \frac{8}{3}$;

esparru puntudunaren azalera, berriz, hau: $8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

A.5 ariketa

Kalkula ezazu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizearen A^{2017} berretura.

Ebazpena:

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ohartzen bagara, identitate-matrizea da zeinua aldatuta,

hau da: $A^2 = -I_2$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = -A$

$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = I_2$

...

$A^{2017} = A^{4(504)+1} = (A^4)^{504} \cdot A = I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B AUKERA

B.1 ariketa

Matrize hau emanda:

$$A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

a) m -ren zer baliotarako du alderantzizkoa A matrizeak? Aztertu matrizearen heina m parametroaren arabera.

b) Aurki ezazu m -ren zer baliotarako betetzen den berdintza hau: $A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ebazpena

a) A matrizeak alderantzizkoa izango badu, haren matrizearen determinanteak ez du zero izan behar. Beraz, hau bete behar da: $-2m^2 \neq 0$

Horrenbestez, A matrizeak alderantzizkoa du zero ez diren m -ren balio guztietarako.

- m zero ez denean, matrizearen heina 3 da.
- $m = 0$ denean, matrizearen heina 1 da, aise ikusten den bezala, zeren eta 2 ordenatik beherako guztiak nuluak baitira.

b) Matrizea:

$$A^2 = \begin{pmatrix} m^2 & -2m+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+m & m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Gaiak berdinduta, ikusten da balio posible bakarra $m = 2$ dela ($m = -2$ balioak ez du balio, ez baitu betetzen $-2 + m = 0$ baldintza).

B.2 ariketa

Kalkula ezazu

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3} \quad \text{zuzena perpendikularki ebakitzen duen eta } A(14, 3, 3)$$

puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.

Ebazpena

Modu bat baino gehiago dago problemari aurre egiteko.

Haietako bat hau da: r zuzenaren P puntu generiko batek baldintza hauek ditu:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Beraz, PA bektoreak ekuazio hauek ditu: $(2t-14, -2t, 3t-2)$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

Orain, \mathbf{PA} bektoreak eta zuzenaren bektore zuzentzaileak perpendikularrak izan behar dutelako baldintza ezarriko dugu (haien biderkadura eskalarra zero izango da). Beraz, $(2t-14, -2t, 3t-2) \cdot (2, -2, 3) = 0$; hortik: $t = 2$. Hala, problemaren baldintza betetzen duen P puntua kalkulatzen da. Ebatzita, hau lortzen da: $P(4, -1, 7)$. P ezagututa, eskatutako zuzenaren bektore zuzentzailea lortuko dugu; hau da:
 $\mathbf{PA} = (-10, -4, 4)$.

Azkenik, eskatutako zuzena lortuko dugu:

$$s \equiv \frac{x-14}{-10} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-3}{4}$$

Beste aukera bat litzateke A -tik pasatzen den eta r -rekiko perpendikularra den plano kalkulatzea. Gero, plano horren eta r zuzenaren arteko ebakipuntua kalkulatuko litzateke, eta, hala, P puntua lortuko. Ondoren, aurreko atalean bezala amaituko litzateke.

B.3 ariketa

Funtzio hau emanda: $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

- Zein da funtzioaren eremua? Zer tartetan da gorakorra funtzioa?
- Arrazoitu ea maximorik eta minimorik duen. Baiezkoan, aurki itzazu. Kalkulatu kurba horrek $x = 0$ puntuan duen zuzen ukitzailea.

Ebazpena

- Funtzioa ez da existituko izendatzailea nulua denean; beraz, ez da existitzen $x = 1$ eta $x = -1$ denean. Eremua hau da: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Funtzioaren deribatua hau da: $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. Ikus daitekeen bezala, positiboa da beti; beraz, funtzioa gorakorra da bere eremu osoan.

- Lehen deribatua ez da inoiz ezeztatzen; beraz, funtzioak EZ du maximorik ez minimorik.
- $(0, 0)$ puntuan, zuzen ukitzailearen malda 1 da; beraz, $y = x$ zuzena da.

B.4 ariketa

Kalkula ezazu integral hau:

$$\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

Ebazpena

Izendatzailea faktorizatuz eta zatikitan deskonposatuz, hau dugu:

$$\frac{x^2 + 5}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

Koefizienteak kalkulatu, hau dugu: $A = 5$, $B = -4$, $C = 6$

$$\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 + x} dx = 5 \ln x - 4 \ln(x-1) - \frac{6}{x-1} + Cte$$

B.5 ariketa

Autobus bat hiru motatako 60 bidaiari garraiatzen ari da. Bidaiari batzuek txartel osoa ordaindu dute, hau da, 1,2 euro.

Beste bidaiari batzuek % 80 ordaindu dute, eta beste batzuek % 50. Autobusak, guztira, 46,56 euro bildu ditu.

Kalkula ezazu zenbat bidaiari dauden mota bakoitzean, jakinik deskonturik handiena duten bidaiarien kopurua gainerako bidaiarien kopurua halako bi dela.

Ebazpena

Txartel osoa ordaintzen duten bidaiarien kopuruari X deituz, eta % 20ko deskontuarekin eta % 50eko deskontuarekin ordaintzen dutenei Y eta Z deituz, hau planteatu dezakegu:

$$X + Y + Z = 60$$

$$1.2X + (0.8)(1.2)Y + 0.5(1.2)Z = 46.56$$

$$Z = 2(X + Y)$$

Eta, ebatzita: $X = 14$, $Y = 6$; $Z = 40$.