

Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR



**Evaluación para el
Acceso a la Universidad**

UPV/EHU

2017



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2017ko UZTAILA

MATEMATIKA II

EVALUACION PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JULIO 2017

MATEMÁTICAS II

***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

***Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a

$$ax + 2y + 6z = 0$$

$$2x + ay + 4z = 2$$

$$2x + ay + 6z = a - 2$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso $a = 0$.

Ejercicio A2

Dada la recta que pasa por los puntos $A(0, 2, 3)$ y $B(-1, 1, 1)$ encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto $M(1, 0, 1)$ sea la misma que la distancia de P al punto $N(0, 4, 2)$.

Ejercicio A3

Sabemos que la recta $y = 2x - 10$ es tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1 \text{ en el punto } P(1, -8).$$

- Calcula los valores de A y B .
- Calcular los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y = -15x - 1$.

Ejercicio A4

Resolver la siguiente integral $\int (x+5)e^{3x} dx$

Ejercicio A5

La suma de 45 números seguidos nos da 1890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

a) Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x = -3$.

Ejercicio B2

a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0,$$

y que pasa por el punto $P(2, 6, 5)$.

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

Ejercicio B3

Dada la función $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

- Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función. Si existen hallarlos.
- ¿Para qué intervalos es creciente la función?
- Hallar todas las asíntotas de la función.

Ejercicio B4

Calcular el área del recinto limitado por las siguientes parábolas, realizando un dibujo del mismo.

$$y = -x^2 - 10x, \quad y = (x+4)^2.$$

Ejercicio B5

Dado el número $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ sea $Z = N^{2017}$.

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿es Z múltiplo de 10?



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Crterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos que no anulan el determinante (0,75 puntos)
- Discusión en los casos 2 y -2 (0,75 puntos)
- Resolución para el caso $a=0$ (0,5 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)

- Planteamiento del problema: obtención de la recta que pasa por los dos puntos y el plano mediatriz, u otros procedimientos alternativos (1 punto)
- Obtención del punto P como intersección de plano y recta o como resolución de una ecuación. (1 punto)

Problema A.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Obtención adecuada de los parámetros imponiendo las condiciones pertinentes (1 punto)
- Punto de corte de la función con la recta (0,5 puntos)

Problema A. 4 (2 puntos)

- Aplicación de la integración por partes (0, 5 puntos)
- Cálculo correcto de la integral aplicando el método anterior (1, 5 puntos)

Problema A.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema , bien a través de una ecuación, por ensayo error u otro método(1 punto)
- Resolución correcta del problema y obtención del primer y último valor de la serie (1 punto)



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

- Cálculo del determinante de la matriz (0,75 puntos)
- Discusión del valor del determinante para que la matriz admita inversa(0,75 puntos)
- Cálculo de la matriz inversa para $x = -3$ (0,5 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)

- Planteamiento del problema , obtención del vector director de la recta paralela a los planos como producto vectorial de los vectores normales de los planos dados (1 punto).
- Cálculo de la distancia entre los dos planos, bien como distancia de puntos (que corresponden a la intersección de la recta con los planos) o como distancia de punto a plano) (1 punto).

Problema B.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0,5 puntos).
- Discusión de los puntos críticos (0,5 puntos).
- Obtención de los Intervalos de crecimiento (0,5 puntos).
- Obtención de las asíntotas (0,5 puntos).

Problema B. 4 (2 puntos)

- Dibujo adecuado del recinto como intersección de dos parábolas y el cálculo de los puntos de corte de dichas parábolas.(1 punto).
- Cálculo del área del recinto mediante la regla de Barrow (1 punto).

Problema B.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema razonando el método, obtención del dígito correspondiente a las unidades de N (1,25 puntos).
- Resolución correcta del problema razonando con respecto a las unidades de Z (1 punto).



SOLUCIONES

OPCION A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a

$$ax + 2y + 6z = 0$$

$$2x + ay + 4z = 2$$

$$2x + ay + 6z = a - 2$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso $a = 0$.

Solución

El determinante del sistema es igual a $2(a^2 - 4)$, igualando a cero obtenemos los valores $a = 2$ y $a = -2$

Por tanto:

1. para $a \neq 2$ y -2 , El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO
2. Para $a = 2$, el rango de la matriz es 2, y el rango de matriz ampliada también es 2, por tanto el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO
3. Para $a = -2$, los rangos de las matrices son 2 y 3, por tanto el sistema es INCOMPATIBLE.

Para el caso $a = 0$ sabemos que tiene solución y resolviendo nos da: $x = 5$, $y = 6$, $z = -2$

Ejercicio A2

Dada la recta que pasa por los puntos $A(0, 2, 3)$ y $B(-1, 1, 1)$, encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto $M(1, 0, 1)$ sea la misma que la distancia de P al punto $N(0, 4, 2)$.

Solución

Hay varias maneras de resolver el problema, una de ellas es hallar el plano mediatriz de los puntos M y N e intersecarlo con la recta que pasa por A y B .

Plano mediatriz: $x - 4y - z + 9 = 0$ (pasa por el punto medio de MN y tiene como vector normal MN). La recta en paramétricas tiene por ecuación $(t, 2+t, 3+2t)$.

La intersección del plano y la recta nos da el punto $P(-2/5, 8/5, 11/5)$

Otra manera es plantear la condición de equidistancia y resolver la ecuación resultante, esto es: $(t-1)^2 + (2+t)^2 + (3+2t-1)^2 = t^2 + (2+t-4)^2 + (3+2t-2)^2$

Resolviendo tenemos $t = -2/5$, por tanto el punto es $P(-2/5, 8/5, 11/5)$.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

Ejercicio A3

Sabemos que la recta $y=2x-10$ es tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1 \text{ en el punto } P(1,-8).$$

c) Calcula los valores de A y B.

d) Calcular los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta de ecuación $y = -15x - 1$.

Solución

c) La derivada de la función es : $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$. Al imponer la condición que la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$ tenga por pendiente 2, nos queda la condición: $3 + 2A + B = 2$.

Por otra parte el punto $P(1,-8)$ pertenece a la curva, por tanto : $1 + A + B - 1 = -8$.

Resolviendo las dos condiciones nos da $A = 7$ y $B = -15$.

$$\text{La curva es por tanto } f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1$$

d) Los puntos de corte serán los que resulten de resolver la ecuación:

$x^3 + 7x^2 - 15x - 1 = -15x - 1$. De donde $x^3 + 7x^2 = 0$, dando lugar a dos soluciones $x = 0$ (raíz doble) y $x = -7$.

Ejercicio A4

Resolver la siguiente integral $\int (x+5)e^{3x} dx$

Solución

La integral $\int (x+5)e^{3x} dx$ se puede resolver por partes:

$$u = x + 5 \quad du = dx$$

Llamando $dv = e^{3x} dx$ obtenemos $v = \frac{1}{3} e^{3x}$

Por tanto $\int (x+5)e^{3x} dx = (x+5)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx$

Resolviendo: $\int (x+5)e^{3x} dx = (x+5)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$



**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

Ejercicio A5

La suma de 45 números seguidos nos da 1890. ¿Cuál es el menor y el mayor de los números que componen esa suma?

Solución

Si el primero de los números es x , podemos plantear la siguiente ecuación:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 43) + (x + 44) = 1890$$

De dónde $45x + (1 + 2 + 3 + \dots + 43 + 44) = 1890$. Resolviendo $x = 20$ (es el primer número), y el último es 64.

SOLUCIONES

Ejercicio B1

Calcula para qué valor o valores de x admite inversa la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x = -3$

Solución

a) Para que SI sea inversible la matriz A se ha de cumplir que su determinante sea distinto de cero. Por tanto : $5 - x^2 = 0$: nos dará los valores para los que NO existe inversa, esto para $x = \pm\sqrt{5}$ NO admite inversa.

b) La matriz inversa para el caso $x = 3$ es :

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

Ejercicio B2

a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0,$$

y que pasa por el punto $P(2, 6, 5)$

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida

Solución

c) Hay varias formas de resolver el problema. La recta pedida será perpendicular a los vectores normales de ambos planos, luego su dirección coincidirá con el producto vectorial de los vectores $(1, -3, 1)$ y $(2, -1, 3)$. El producto vectorial de ambos vectores nos da: el vector $(-8, -1, 5)$.

Por tanto la recta pedida es:

$$\frac{x-2}{-8} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

d) Para calcular la distancia de la recta al primer plano usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano. En nuestro caso:

$$d = \frac{|2 - 3 \cdot 6 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$$

Ejercicio B3

Dada la función

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

a) Razonar la existencia de máximos y mínimos de la función.

Si existen hallarlos.

b) ¿Para qué intervalos es creciente la función?

c) Hallar todas las asíntotas de la función

Solución

d) Es claro que la función no existe en $x=0$.

La derivada de la función es igual a

$$y' = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}, \text{ por tanto tendrá un máximo o mínimo}$$

cuando $x=2$, se comprueba que es un MINIMO.

e) La función será creciente cuando $y' = \frac{x^3 - 8}{x^3} \geq 0$

Se verificará para los valores $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

f) Tiene dos asíntotas:

Vertical $x = 1$

Oblicua $y = x$

No tiene asíntotas horizontales.

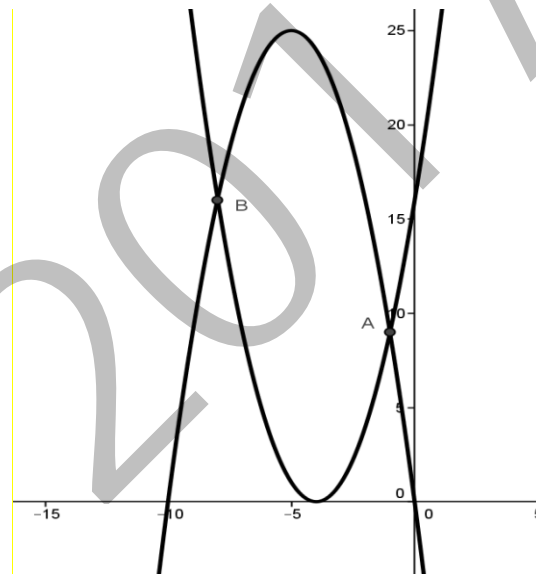
Ejercicio B4

Calcular el área del recinto limitado por las parábolas, realizando un dibujo del recinto.

$$y = -x^2 - 10x \quad ; \quad y = (x + 4)^2.$$

Solución

Las dos parábolas se cortan en los puntos A (-1, 9) y B(-8, 16)



$$Area = \int_{-8}^{-1} ((-x^2 - 10x) - (x^2 + 8x + 16)) dx = \frac{343}{3}$$

Ejercicio B5

Dado el número $N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ sea $Z = N^{2017}$.
Contestar razonadamente a la siguiente pregunta:

¿ es Z múltiplo de 10 ?

Solución:

Si observamos las terminaciones de las potencias sucesivas de 2 (evidentemente las potencias de 6 siempre acaban en 6 y las potencias de 5 acaban en 5) obtenemos:



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

.....

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

Nos indica que las potencias de 2 se van repitiendo en “ciclos de 4”. Por tanto si dividimos 2017 entre 4 y nos fijamos en el resto (que es 1), resolveremos el problema de las potencias de 2.

Así tenemos que las unidades del número 2^{2017} será 2 , y la cifra de las unidades de N será 3 (la suma de las unidades de $2+5+6$)

Razonando de manera similar obtenemos las unidades de Z (observemos que N acaba en 3).

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

.....

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

Por tanto las unidades de Z nunca pueden acabar en cero y por tanto **Z no puede ser múltiplo de 10**. Evidentemente se podría razonar que Z no es múltiplo de 10 una vez conocida la terminación de N.