



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2017ko UZTAILA

MATEMATIKA II

EVALUACION PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JULIO 2017

MATEMÁTICAS II

***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

***Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 Ariketa

Eztabaidatu sistema hau a parametroaren balioen arabera:

$$ax + 2y + 6z = 0$$

$$2x + ay + 4z = 2$$

$$2x + ay + 6z = a - 2$$

Existitzen baldin bada, aurkitu soluzioa $a = 0$ kasurako.

A2 Ariketa

$A(0, 2, 3)$ eta $B(-1, 1, 1)$ puntuetatik pasatzen den zuzena emanda, aurkitu zuzen horren P puntu bat, baldintza hau betetzen duena: P -tik $M(1, 0, 1)$ punturainoko distantzia eta P -tik $N(0, 4, 2)$ punturainokoa berdinak izatea.

A3 Ariketa

Badakigu $y = 2x - 10$ zuzena $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ funtzioaren grafikoaren ukitzailea dela $P(1, -8)$ puntuan.

- Kalkulatu A -ren eta B -ren balioak.
- Kalkulatu $f(x)$ funtzioaren eta $y = -15x - 1$ ekuazioa duen zuzenaren arteko ebakitze-puntuak.

A4 Ariketa

Kalkula ezazu integral hau: $\int (x+5)e^{3x} dx$

A5 Ariketa

Ondoz ondoko 45 zenbakiren batura 1.890 da. Zein dira batura hori ematen duten zenbakietako txikiena eta handiena?

B AUKERA

B1 Ariketa

a) Kalkulatu x -ren zer baliotarako (bat edo bat baino gehiago) onartzen duen alderantzizkoa matrize honek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Existitzen baldin bada, aurkitu A -ren alderantzizkoa $x = -3$ baliorako.

B2 Ariketa

a) Aurkitu zer ekuazio duen zuzen batek, jakinik

$$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \quad \text{eta} \quad \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$$

ekuazioa duten planoekiko paraleloa dela eta $P(2, 6, 5)$ puntutik pasatzen dela.

b) Aurkitu zer distantzia dagoen lehen planotik zuzen horretaraino.

B3 Ariketa

Funtzio hau emanda: $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

a) Arrazoitu ea funtzioak maximo eta minimoak dituen ala ez. Baldin eta halakoak baditu, kalkula itzazu.

b) Zer tartetan da gorakorra funtzioa?

c) Aurkitu funtzioaren asintota guztiak.

B4 Ariketa

Kalkulatu parabola hauek mugatutako esparruaren azalera, eta marraztu esparru hori:

$$y = -x^2 - 10x, \quad y = (x+4)^2.$$

B5 Ariketa

$N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ zenbakia emanda, izan bedi $Z = N^{2017}$. Arrazoituz, erantzun galdera honi: Z zenbakia 10en multiploa da?



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ariketa (2 puntu)

- Matrizearen determinantea kalkulatzeko eta determinantea ezabatzen ez duten kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu)
- 2 eta -2 kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu).
- $a = 0$ kasurako ebaztea (0,5 puntu)

A.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea: bi puntuetatik pasatzen den zuzena eta plano erdibitzailea lortzea edo ordezkoko beste metodo batzuk (1 puntu)
- P puntua planoaren eta zuzenaren arteko ebakipuntu gisa edo ekuazio baten ebazpen gisa lortzea (1 puntu)

A.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea (0,5 puntu)
- Parametroak ondo lortzea, horretarako behar diren baldintzak ezarriz (1 puntu)
- Funtzioaren eta zuzenaren arteko ebakipuntua (0,5 puntu)

A.4 ariketa (2 puntu)

- Zatikako integrazioa aplikatzea (0,5 puntu)
- Aurreko metodoa erabiliz, integrala zuzen kalkulatzeko (1,5 puntu)

A.5 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea: ekuazio baten bidez, saiakuntza eta errakuntza bidez edo beste metodoren baten bidez (1 puntu)
- Problema zuzen ebaztea eta serieko lehen balioa eta azken balioa lortzea (1,5 puntu)



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B AUKERA

B.1 ariketa (2 puntu)

- Matrizaren determinantea kalkulatzeko (0,75 puntu)
- Matritzeak alderantzizkoa onar dezan determinanteak izan behar duen balioa eztabaidatzea (0,75 puntu)
- Alderantzizko matrizea kalkulatzeko $x = -3$ baliorako (0,5 puntu)

B.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea eta planoekiko paraleloa den zuzenaren bektore zuzentzailea lortzea emandako planoen bektore normalen biderkadura bektorial gisa (1 puntu)
- Bi planoen arteko distantzia kalkulatzeko, dela puntu arteko distantzia gisa (zuzenaren eta planoen arteko ebakipuntuak), dela puntutik planorainoko distantzia gisa (1 puntu)

B.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua lortzea (0,5 puntu)
- Puntu kritikoak eztabaidatzea (0,5 puntu)
- Goratze-tarteak lortzea (0,5 puntu)
- Asintotak lortzea (0,5 puntu)

B.4 ariketa (2 puntu)

- Esparrua bi parabolaren ebakidura gisa modu egokian marraztea eta parabola horien ebakipuntuak kalkulatzeko (1 puntu)
- Esparruaren azalera kalkulatzeko Barrow-ren erregelaren bidez (1 puntu)

B.5 ariketa (2 puntu)

- Problema metodoa arrazoituz planteatzea, N -ren batekoei dagokien digitua lortzea (1 puntu)
- Problema zuzen ebaztea, Z -ren batekoei buruz arrazoituz (1 puntu)



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPENAK

A AUKERA

A.1 ariketa

Eztabaidatu sistema hau a parametroaren balioen arabera:

$$ax + 2y + 6z = 0$$

$$2x + ay + 4z = 2$$

$$2x + ay + 6z = a - 2$$

Existitzen baldin bada, aurkitu soluzioa $a = 0$ kasurako.

Ebazpena

Sistemaren determinantea $2(a^2 - 4)$ da. Zerora berdinduz, $a = 2$ eta $a = -2$ balioak lortuko ditugu. Beraz:

- $a \neq 2$ eta -2 denean, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.
- $a = 2$ denean, matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduaren heina ere 2 da; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da.
- $a = -2$ denean, matrizeen heinak 2 eta 3 dira; beraz, sistema BATERAEZINA da.

$a = 0$ kasurako, badakigu soluzioa duela; ebatzita, hau emango du:
 $x = 5, y = 6, z = -2$

A.2 ariketa

$A(0, 2, 3)$ eta $B(-1, 1, 1)$ puntuetatik pasatzen den zuzena emanda, aurkitu zuzen horren P puntu bat, baldintza hau betetzen duena: P -tik $M(1, 0, 1)$ punturainoko distantzia eta P -tik $N(0, 4, 2)$ punturainokoa berdinak izatea.

Ebazpena

Modu bat baino gehiago dago problema ebazteko. Hau da haietako bat: M eta N puntuen plano erdibitzailea aurkitzea eta A eta B puntuetatik pasatzen den zuzena zer puntutan ebakitzen duen aurkitzea.

Plano erdibitzailea: $x - 4y - z + 9 = 0$ (MN -ren erdiko puntutik pasatzen da, eta haren bektore normala MN da). Zuzenak, parametrikotan, ekuazio hau du: $(t, 2 + t, 3 + 2t)$.

Planoaren eta zuzenaren arteko ebakipuntua hau da: $P(-2/5, 8/5, 11/5)$

Bada beste modu bat: distantziakidetasunaren baldintza planteatzea eta hala lortzen den ekuazioa ebaztea. Honela:

$$(t-1)^2 + (2+t)^2 + (3+2t-1)^2 = t^2 + (2+t-4)^2 + (3+2t-2)^2$$

Ebatzita, $t = -2/5$; beraz, hau da puntua: $P(-2/5, 8/5, 11/5)$.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

A.3 ariketa

Badakigu $y=2x-10$ zuzena $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ funtzioaren grafikoaren ukitzailea dela $P(1,-8)$ puntuan.

- a) Kalkulatu A -ren eta B -ren balioak.
- b) Kalkulatu $f(x)$ funtzioaren eta $y=-15x-1$ ekuazioa duen zuzenaren arteko ebakipuntuak.

Ebazpena

- a) Funtzioaren deribatua hau da : $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$. Eta $x = 1$ puntuan kurbaren ukitzailea den zuzenaren maldak 2 izan behar duelako baldintza ezarrita, baldintza hau gelditzen zaigu: $3 + 2A + B = 2$. Bestalde, $P(1,-8)$ puntua kurban dago; beraz: $1 + A + B - 1 = -8$. Bi baldintzak ebatzita, hau ateratzen da: $A = 7$ eta $B = -15$.

Kurba, beraz, hau da: $f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1$

- b) Ebakipuntuak ekuazio hau ebatzita lortzen dira:
 $x^3 + 7x^2 - 15x - 1 = -15x - 1$. Eta hortik: $x^3 + 7x^2 = 0$. Bi soluzio lortzen dira: $x = 0$ (erro bikoitza) eta $x = -7$.

A.4 ariketa

Kalkula ezazu integral hau: $\int (x+5)e^{3x} dx$

Ebazpena

$\int (x+5)e^{3x} dx$ integrala zatika ebatz daiteke:

Honela deituz: $u = x + 5$ $du = dx$
 $dv = e^{3x} dx$ hau lortuko dugu: $v = \frac{1}{3}e^{3x}$

Beraz: $\int (x+5)e^{3x} dx = (x+5)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx$

Eta, ebatzita: $\int (x+5)e^{3x} dx = (x+5)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

A.5 ariketa

Ondoz ondoko 45 zenbakiren batura 1.890 da. Zein dira batura hori ematen duten zenbakietako txikiena eta handiena?

Ebazpena

Lehen zenbakia x baldin bada, ekuazio hau planteatu dezakegu:

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+43) + (x+44) = 1.890$$

Eta hortik: $45x + (1+2+3+\dots+43+44) = 1.890$. Ebatzita: $x = 20$ (lehen zenbakia da), eta azkena 64 da.

EBAZPENAK

B AUKERA

B.1 ariketa

Kalkulatu x -ren zer baliotarako (bat edo bat baino gehiago) onartzen duen alderantzizkoa matrize honek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Existitzen baldin bada, aurkitu A -ren alderantzizkoa $x = -3$ baliorako.

Ebazpena

a) A matrizeak alderantzizkoa izango badu, bete behar da haren determinantea zero ez izatea. Beraz: $5 - x^2 = 0$; eta horrek adieraziko digu zer baliotarako ez dagoen alderantzizkorik; hau da, $x = \pm\sqrt{5}$ baliorako ez dago alderantzizkorik.

b) Hau da alderantzizko matrizea $x = 3$ kasurako:

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.2 ariketa

a) Aurkitu zer ekuazio duen zuzen batek, jakinik

$$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \quad \text{eta} \quad \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$$

ekuazioa duten planoekiko paraleloa dela eta $P(2, 6, 5)$ puntutik pasatzen dela.

b) Aurkitu zer distantzia dagoen lehen planotik zuzen horretaraino.

Ebazpena

a) Modu bat baino gehiago dago problema ebazteko. Eskatutako zuzena bi planoen bektore normalekiko perpendikularra izango da; beraz, haren norabidea bat etorriko da $(1, -3, 1)$ eta $(2, -1, 3)$ bektoreen biderkadura bektorialarekin. Bi bektore horien biderkadura bektorialak bektore hau ematen du: $(-8, -1, 5)$.

Beraz, hau izango da eskatutako zuzena:

$$\frac{x-2}{-8} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

b) Zuzenaren eta lehen planoaren arteko distantzia kalkulatzeko, puntu batetik plano baterainoko distantziaren formula erabiliko dugu. Gure kasuan:

$$d = \frac{|2 - 3 \cdot 6 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$$

B.3 ariketa

Funtzio hau emanda: $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

a) Arrazoitu ea funtzioak maximo eta minimoak dituen ala ez.

Baldin eta halakoak baditu, kalkula itzazu.

b) Zer tartetan da gorakorra funtzioa?

c) Aurkitu funtzioaren asintota guztiak.

Ebazpena

a) Garbi dago funtzioak ez duela existentziarik $x = 0$ denean. Funtzioaren deribatua hau izango da:



**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

$y' = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$; beraz, maximo bat edo minimo bat izango du $x = 2$ denean; MINIMO bat dela egiaztatzen da.

b) $y' = \frac{x^3 - 8}{x^3} \geq 0$ denean, funtzioa gorakorra izango da.

Balio hauetan gertatuko da: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

c) Bi asintota ditu:

Bertikala $x = 1$
Zeharria $y = x$

Ez du asintota horizontalik.

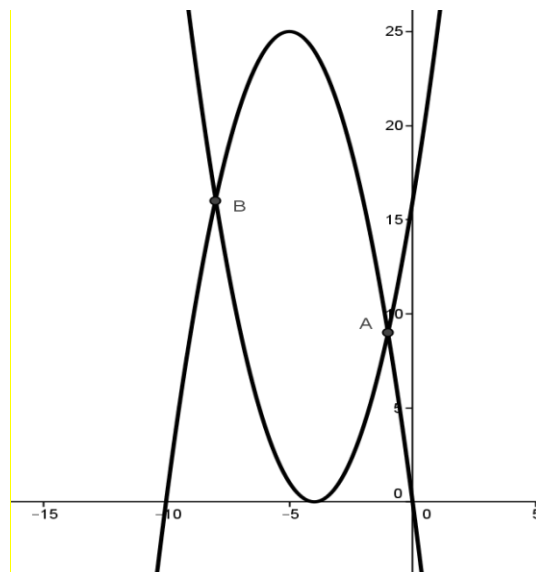
B.4 ariketa

Kalkulatu parabola hauek mugatutako esparruaren azalera, eta marraztu esparru hori:

$$y = -x^2 - 10x, \quad y = (x + 4)^2$$

Ebazpena

Bi parabolek $A(-1, 9)$ eta $B(-8, 16)$ puntuetan ebakitzen dute elkar.





**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

$$Azalera = \int_{-8}^{-1} ((-x^2 - 10x) - (x^2 + 8x + 16)) dx = \frac{343}{3}$$

B.5 ariketa

$N = 2^{2017} + 5^{2017} + 6^{2017}$ zenbakia emanda, izan bedi $Z = N^{2017}$.

Arrazoituz, erantzun galdera honi: Z zenbakia 10en multiploa da?

Ebazpena

2ren ondoz ondoko berreturak aztertuta (6ren berreturak 6ez amaitzen dira beti, eta 5en berreturak 5ez), hau lortuko dugu:

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

.....

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

Horrek adierazten digu 2ren berreturen batekoen zifrak "4ko ziklotan" errepikatuz doazela. Beraz, 2017 zenbakia 4 zenbakiaz zatitzen badugu eta hondarrari erreparatzen badiogu (hondarra 1 da), 2ren berreturen problema ebatziko dugu.

Hala, 2^{2017} zenbakiaren batekoen zifra 2 izango da, eta N -ren batekoen zifra 3 izango da (2 + 5 + 6 baturaren batekoen zifra).

Modu berean arrazoituz, Z zenbakiaren batekoak lortuko ditugu (ohar gaitezen N zenbakia 3z amaitzen dela).



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

.....

$$3^5 = 243$$

$$3^6 = 729$$

Beraz, Z -ren batekoak inoiz ezin dira zeroz amaituak izan, eta, horren ondorioz, **Z ezin da 10en multiploa izan**. Jakina, arrazoitu liteke Z ez dela 10en multiploa N nola amaitzen den jakin ondoren.