PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD · 2015

Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

Examen

Criterios de Corrección y Calificación

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK	*PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2015eko UZTAILA	JULIO 2015
MATEMATIKA II	*MATEMÁTICAS II*

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ calcular qué valor debe tener x para que la matriz inversa de A coincida con la opuesta de A (esto es, $A^{-1}=-A$).

Ejercicio A2

Considera los puntos $A(2,1,2)$, $B(0,4,1)$ y la recta r de ecuación

$$r \equiv x = y-2 = \frac{z-3}{2}.$$

a) Calcular un punto P de la recta que equidiste de los puntos A y B.
b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

Ejercicio A3

Para adornar un mural queremos construir un marco de madera rectangular que encierre una superficie de cinco metros cuadrados. Sabemos que el coste de cada centímetro del marco en los lados horizontales es de 1,5 €, mientras que en los lados verticales es de 2,7 €. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible.

Ejercicio A4

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x}\,dx \ .$$

Ejercicio A5

Una caja contiene monedas de 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos. En total hay 350 monedas. El número de monedas de 50 céntimos es el doble que el de monedas de 10 céntimos. Si en total hay 90 euros ¿cuántas monedas hay de cada clase?

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2015eko UZTAILA

JULIO 2015

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Discute en función del parámetro m el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} mx+my&=1\\ 3x+mz&=m-2\\ -y+z&=m-3 \end{aligned}$$

¿Existen casos de indeterminación? Si la respuesta es afirmativa resolver el sistema en esos casos. Si es negativa explicar por qué.

Ejercicio B2

a) Dada la recta $r:\begin{cases} 3x+y-z=2\\ 2x+y+4z=1 \end{cases}$ y el plano $2x+(a+1)(y-3)+a(z-1)=0$ determinar el valor del parámetro a para que el plano y la recta sean paralelos.

b) ¿Pertenece el punto $P(1, 0, -3)$ al plano obtenido en el apartado anterior?

Ejercicio B3

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si\ \ x\le 2\\ x^2-bx-4 & si\ \ x>2 \end{cases}$$

a) Hallar los valores de a y b sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

b) Calcular la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abcisa $x = 1$.

Ejercicio B4

Representar gráficamente la región del plano limitado por la curva $y=2x^3$, la recta tangente a la gráfica de dicha función en el origen de coordenadas y la recta $x = 1$. Calcular el área de dicha región.

Ejercicio B5

Una caja (prisma rectangular) tiene por dimensiones A, $2A$ y $3A$. Si disminuimos cada una de sus dimensiones en un 50% ¿El volumen habrá disminuido en un 50%? ¿Y el área total habrá disminuido en un 50%? Razona las respuestas.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

- Cálculo de la matriz inversa de A (0,5 puntos)
- Obtención de los valores de x al igualar las dos matrices (1,5 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)

- Planteamiento del problema y obtención del punto de manera correcta (1,25 puntos)
- Obtención del plano de manera correcta (0,75 puntos)

Problema A.3 (2 puntos)

- Planteamiento correcto del problema, llegando a la función de optimización (1 punto)
- Obtención de las dimensiones optimas, aplicando (1 punto)

Problema A. 4 (2 puntos)

- Descomponer la fracción racional impropia en la suma de un polinomio y otra fracción racional propia (0,5 puntos)
- Calcular la primera integral, la correspondiente al polinomio (0,5 puntos)
- Calcular la integral racional propia descomponiéndola en las fracciones simples adecuadas (1 punto)

Problema A.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema de manera algebraica y resolución del sistema de tres ecuaciones. También valdrían resoluciones de ensayo-error u otro medio constructivo (2 puntos).

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)
- Resolución y discusión del determinante de la matriz del sistema de manera adecuada en función del parámetro m (1,25 puntos)
- Efectivamente hay casos de indeterminación para m = 3. Por tanto será este el caso a estudiar (0,75 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)
- Planteamiento correcto del problema y obtención del parámetro a (1.25 puntos)
- Enunciar claramente la pertenencia o no de P al plano obtenido y justificar (0,75 puntos)

Problema B.3 (2 puntos)
- Imponer la condición de continuidad en x= 2 (0,5 puntos)
- Imponer la condición de derivabilidad en x= 2 (0,5 puntos)
- Cálculo de la recta tangente a la función en x = 1 (1 punto)

Problema B. 4 (2 puntos)
- Dibujo de la región pedida (1 punto)
- Cálculo de la integral definida, aplicando correctamente el método de Barrow (1 punto)

Problema B.5 (2 puntos)
- Planteamiento de la fórmula para el volumen una vez disminuidas sus dimensiones en un 50% y razonamiento posterior (1 punto).
- Planteamiento de la fórmula para el área total una vez disminuidas sus dimensiones en un 50% y razonamiento posterior (1 punto).

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

SOLUCIONES

Problema A.1.

Realizando los cálculos pertinentes, las dos matrices son :

$$-A=\begin{pmatrix}-x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{-x}{-x^2+10} & \dfrac{2}{-x^2+10}\\ \dfrac{-5}{-x^2+10} & \dfrac{x}{-x^2+10}\end{pmatrix}.$$

Al imponer la condición de igualdad tenemos:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{-x}{-x^2+10} & \dfrac{2}{-x^2+10}\\ \dfrac{-5}{-x^2+10} & \dfrac{x}{-x^2+10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix}.$$

Al igualar los elementos de la matriz obtenemos que $-x^2+10=1$, y por tanto $x=\pm 3$

Problema A.2.

a) Si pasamos la recta dada a paramétricas, cualquier punto de la recta tiene la siguiente expresión $P(t,\ 2+t,\ 3+2t)$, imponiendo la condición de equidistancia, esto es $PB = PA$ tenemos:

$$\sqrt{t^2+(t-2)^2+(2+2t)^2}=\sqrt{(t-2)^2+(1+t)^2+(1+2t)^2}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $t = -1$. Por tanto el punto es P (-1, 1, 1)

b) El plano buscado tiene como vector normal el vector director de la recta, esto es: $v(1, 1, 2)$. Como el plano pasa por el punto $A(2,1,2)$ su ecuación es :

$$(x-2)+(y-1)+2(z-2) = 0.$$

Simplificando obtenemos $x+y+2z = 7$

Problema A.3.

Llamado x e y a las dimensiones del marco (medidos en metros) , tenemos:

$$x\cdot y=5 \;\Rightarrow\; y=\frac{5}{x}$$

Los lados horizontales nos costarán:

$$H= 2x.100.1{,}5= 300x$$

mientras que los lados verticales nos costarán:

$$V= 2y.100.(2.7)= 540y$$

La función que debe ser mínima es

$$P=300x+540y=300x+\frac{2700}{x}$$

$$P'=300-\frac{2700}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; 300x^2-2700=0 \;\Rightarrow\; x^2=9 \;\Rightarrow\; x=3$$

Puede comprobarse que es un mínimo. Los valores pedidos son y = 5/3 metros y x = 3 metros.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

Problema A.4.

a) Por ser el grado del numerador mayor que el del denominador descomponemos la fracción en la suma de dos fracciones:

$$\frac{2x^3+x-1}{x^2-5x} = 2x+10+\frac{51x-1}{x^2-5x}$$

Por tanto podemos expresar la integral como

$$\int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x}dx = \int 2xdx + \int 10dx + \int \frac{51x-1}{x^2-5x}dx = \frac{2x^2}{2} + 10x + \int \frac{51x-1}{x^2-5x}dx$$

Al ser el denominador un polinomio de grado 2, lo descomponemos en sus raíces

$$x^2-5x = x(x-5),$$

por tanto

$$\frac{51x-1}{x^2-5x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5}$$

Obteniendo A = 1/5 y B = 254/5, Luego

$$\int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x}dx = x^2+10x+\frac{1}{5}\ln|x| + \frac{254}{5}\ln|x-5| + C$$

Problema A.5.

Llamando x, y , z al número de monedas de 10, 20 y 50 céntimos respectivamente podemos plantear el siguiente sistema:

$$x+y+z=350$$
$$z=2x$$
$$10x+20y+50z=9.000$$

Resolviendo x = 40 , y = 230 , z = 80

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

Problema B.1.

Al estudiar el determinante del sistema de la matriz de los coeficientes e igualarla a cero tenemos que: $m^2 - 3m = 0$, de donde m = 0 o m = 3
Estudiando los distintos casos tenemos:

- Para $m \neq 0{,}3$, al ser el rango de la matriz y de su ampliada igual a 3(número de incógnitas), el sistema será compatible determinado.
- Para m = 0, podemos ver fácilmente que el rango de la matriz es 2, mientras que el rango de la ampliada es 3 pues $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, por tanto el sistema es incompatible
- Para m = 3, los dos rangos (el de la matriz y su ampliada coinciden) y son igual a 2, por tanto el sistema en este caso es compatible indeterminado.

Nos piden que resolvamos el sistema en este último caso, esto es para m = 3.
El sistema es:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 1 \\ 3x + 3z &= 1 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}$$

Se ve claramente que con la primera y tercera ecuación podemos obtener la segunda ecuación (también podríamos coger la primera y la segunda ecuación) por tanto nos quedamos con

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 1 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}.$$

Por ser y = z, obtenemos que $x = \dfrac{1-3y}{3}$. La solución del sistema es por tanto $(\dfrac{1-3y}{3}, y, y)$ con $y \in R$

Problema B.2.

a) El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen la recta; dichos vectores son : **a(3, 1,-1) y b(2, 1, 4)**.
Por tanto **a x b** = (5, -14, 1). es el vector director de r.
Para que el plano dado y la recta sean paralelas tienen que ser perpendiculares el vector normal al plano y el vector director de la recta .Esto es su producto escalar ha de ser cero.

$$2.\ 5 + (a+1)(-14) + a = 0$$

Resolviendo tenemos que a = -4/13
Por tanto el plano es : $2x + \dfrac{9}{13}y - \dfrac{4}{13}z = \dfrac{23}{13}$
b) Para que el punto P pertenezca al plano ha de satisfacer su ecuación. Pero como

$$2.1 + \frac{9}{13}0 - \frac{4}{13}(-3) = \frac{18}{13} \neq 0,$$

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

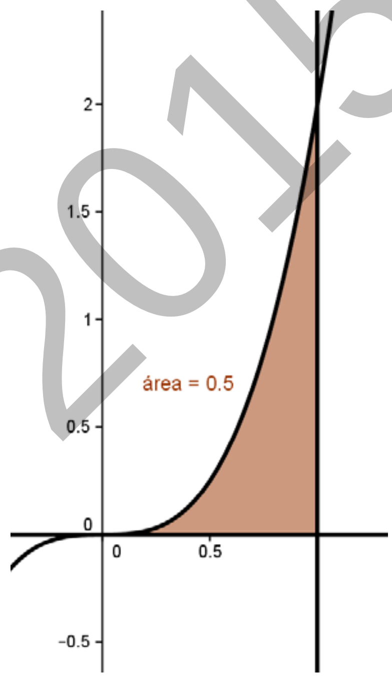
el punto P no pertenece al plano.

Problema B.3.

a) Las dos funciones son derivables en todos los puntos distintos al $x = 2$, por tanto hemos de estudiar únicamente el punto $x = 2$. Para que sea derivable se ha de cumplir en primer lugar sea continua en $x =2$. Al imponer la condición de continuidad obtenemos que $4a+6= - 2b$
Si ahora imponemos la condición de que sea derivable en $x =2$ se obtiene que $4a+b = 1$. Resolviendo el sistema tenemos $a = 2$; $b = -7$.
b) El punto en que nos piden la tangente es (1, 5) y la pendiente de la recta tangente en dicho punto es 7. Por tanto la ecuación de la recta tangente es $y-5 =7(x-1)$

Problema B.4.

La recta tangente en el punto $x = 0$ tiene por ecuación $y = 0$, por tanto la gráfica es:



El área pedida, aplicando la regla de Barrow es:

$$\int_0^1 2x^3dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Problema B.5.

Si llamamos V al volumen antes de la disminución tenemos que $V = 6A^3$. El nuevo volumen (una vez disminuido el 50 % sus dimensiones) será

$$V' = 6A^3(0,5)^3 = 0{,}125V^3 = \frac{1}{8}V^3,$$

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

por tanto sí habrá disminuido en más del 50%. En realidad se queda con una octava parte del volumen original .
Razonando del mismo modo con el área total, tenemos que al principio vale

$$Area = 2(3A^2 + 2A^2 + 6A^2) = 22A^2$$

Una vez disminuidas sus dimensiones en un 50% el nuevo área es :

$$Area' = 2(0,5)^2 (3A^2 + 2A^2 + 6A^2) = 0,25 Area.$$

También disminuye en más del 50%, en realidad es la cuarta parte del área total inicial.