Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II
Matemáticas II

EAU 2023 USE

www.ehu.eus

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

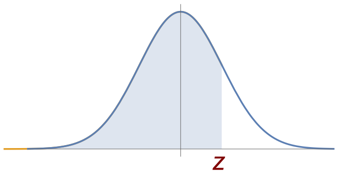
eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2023ko EZOHIKOA | *EXTRAORDINARIA 2023*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0’00	0’01	0’02	0’03	0’04	0’05	0’06	0’07	0’08	0’09
0’0	0’5000	0’5040	0’5080	0’5120	0’5160	0’5199	0’5239	0’5279	0’5319	0’5359
0’1	0’5398	0’5438	0’5478	0’5517	0’5557	0’5596	0’5636	0’5675	0’5714	0’5753
0’2	0’5793	0’5832	0’5871	0’5910	0’5948	0’5987	0’6026	0’6064	0’6103	0’6141
0’3	0’6179	0’6217	0’6255	0’6293	0’6331	0’6368	0’6406	0’6443	0’6480	0’6517
0’4	0’6554	0’6591	0’6628	0’6664	0’6700	0’6736	0’6772	0’6808	0’6844	0’6879
0’5	0’6915	0’6950	0’6985	0’7019	0’7054	0’7088	0’7123	0’7157	0’7190	0’7224
0’6	0’7257	0’7291	0’7324	0’7357	0’7389	0’7422	0’7454	0’7486	0’7517	0’7549
0’7	0’7580	0’7611	0’7642	0’7673	0’7704	0’7734	0’7764	0’7794	0’7823	0’7852
0’8	0’7881	0’7910	0’7939	0’7967	0’7995	0’8023	0’8051	0’8078	0’8106	0’8133
0’9	0’8159	0’8186	0’8212	0’8238	0’8264	0’8289	0’8315	0’8340	0’8365	0’8389
1’0	0’8413	0’8438	0’8461	0’8485	0’8508	0’8531	0’8554	0’8577	0’8599	0’8621
1’1	0’8643	0’8665	0’8686	0’8708	0’8729	0’8749	0’8770	0’8790	0’8810	0’8830
1’2	0’8849	0’8869	0’8888	0’8907	0’8925	0’8944	0’8962	0’8980	0’8997	0’9015
1’3	0’9032	0’9049	0’9066	0’9082	0’9099	0’9115	0’9131	0’9147	0’9162	0’9177
1’4	0’9192	0’9207	0’9222	0’9236	0’9251	0’9265	0’9279	0’9292	0’9306	0’9319
1’5	0’9332	0’9345	0’9357	0’9370	0’9382	0’9394	0’9406	0’9418	0’9429	0’9441
1’6	0’9452	0’9463	0’9474	0’9484	0’9495	0’9505	0’9515	0’9525	0’9535	0’9545
1’7	0’9554	0’9564	0’9573	0’9582	0’9591	0’9599	0’9608	0’9616	0’9625	0’9633
1’8	0’9641	0’9649	0’9656	0’9664	0’9671	0’9678	0’9686	0’9693	0’9699	0’9706
1’9	0’9713	0’9719	0’9726	0’9732	0’9738	0’9744	0’9750	0’9756	0’9761	0’9767
2’0	0’9772	0’9778	0’9783	0’9788	0’9793	0’9798	0’9803	0’9808	0’9812	0’9817
2’1	0’9821	0’9826	0’9830	0’9834	0’9838	0’9842	0’9846	0’9850	0’9854	0’9857
2’2	0’9861	0’9864	0’9868	0’9871	0’9875	0’9878	0’9881	0’9884	0’9887	0’9890
2’3	0’9893	0’9896	0’9898	0’9901	0’9904	0’9906	0’9909	0’9911	0’9913	0’9916
2’4	0’9918	0’9920	0’9922	0’9925	0’9927	0’9929	0’9931	0’9932	0’9934	0’9936
2’5	0’9938	0’9940	0’9941	0’9943	0’9945	0’9946	0’9948	0’9949	0’9951	0’9952
2’6	0’9953	0’9955	0’9956	0’9957	0’9959	0’9960	0’9961	0’9962	0’9963	0’9964
2’7	0’9965	0’9966	0’9967	0’9968	0’9969	0’9970	0’9971	0’9972	0’9973	0’9974
2’8	0’9974	0’9975	0’9976	0’9977	0’9977	0’9978	0’9979	0’9979	0’9980	0’9981
2’9	0’9981	0’9982	0’9982	0’9983	0’9984	0’9984	0’9985	0’9985	0’9986	0’9986
3’0	0’9987	0’9987	0’9987	0’9988	0’9988	0’9989	0’9989	0’9989	0’9990	0’9990
3’1	0’9990	0’9991	0’9991	0’9991	0’9992	0’9992	0’9992	0’9992	0’9993	0’9993
3’2	0’9993	0’9993	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9995	0’9995	0’9995
3’3	0’9995	0’9995	0’9995	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9997
3’4	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9998
3’5	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998
3’6	0’9998	0’9998	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’7	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’8	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’9	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000

LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Izan bedi honako ekuazio linealetako sistema hau:

$$\begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0, \\ 2x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + \alpha y + z = \alpha - 1. \end{cases}$$

Eztabaidatu haren bateragarritasuna α parametroaren balioen arabera.

Ebatzi sistema $\alpha = 0$ kasurako, ahal bada.

B1 Ariketa

Kalkulatu honako bi berdintza hauek betetzen dituzten A eta B matrizeak:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bitez r zuzena eta π planoa. $P(1, -1, 2)$ puntuan perpendikularki elkar ebakitzen dutenak. Baldin eta π planoa $Q(1, 2, 3)$ puntutik pasatzen bada eta $(0, 0, 2)$ bektorea barne badu, kalkulatu r zuzenaren eta π planoaren ekuazioak.

B2 Ariketa

Honako ekuazio hauek duten hiru planoak hartzen dira:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{eta} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

Existitzen al da a eta b parametroen baliorik zeinetarako hiru planoek zuzen batean elkar ebakitzen duten? Erantzuna ezezkoa bada, arrazoitu. Erantzuna baiezkoa bada, kalkulatu balio horiek.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Aztertu f-ren gorakortasun- eta beherakortasuntarteak, kalkulatu haren asintotak, eta aurkitu f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea $x = 0$ abszisa duen puntuan. Egin f funtzioaren grafikoaren gutxi gorabeherako irudikapena.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A, B eta C parametroen balioak $f(0) = 2$ izan dadin, f-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = 1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan paraleloak izan daitezen, eta f-k mutur erlatiboa izan dezan $x = -1$ puntuan. Mutur erlatibo hori maximoa ala minimoa da? Aztertu f-k beste mutur erlatiborik al duen eta zehaztu maximoak edo minimoak diren.

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Kalkulatu $\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx$, eta azaldu kalkulurako erabilitako metodoa.

B4 Ariketa

Marraztu $y = 2x^2 - 4x + 3$ eta $y = x^2 - 2x + 3$ ekuazioetako parabolek mugatzen duten eremua, eta kalkulatu eremu horren azalera.

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Bi dado ditugu, bata normala eta bestea trukatua. Trukatuan bata 4 aldiz dago, eta bia, 2 aldiz. Dado bat ausaz aukeratzen da, eta bitan jaurtitzen da.

a) Zein da lehen jaurtiketan 1 zenbakia eta bigarrenean 2 zenbakia lortzeko probabilitatea?

b) Lehenengo jaurtiketaren emaitza 1 zenbakia eta bigarrenarena 2 zenbakia izan direla jakinik, kalkulatu dado trukatua hautatua izateko probabilitatea.

B5 Ariketa

Mahai baten gainean 500 txanpon dituen kutxa bat hustu da, Kalkulatu

a) aurki kopurua 240 baino handiagoa izateko probabilitatea;

b) aurki kopurua 230 baino txikiagoa izateko probabilitatea;

c) aurki kopurua 230 eta 240 bitartean (biak barne) egoteko probabilitatea.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0, \\ 2x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + \alpha y + z = \alpha - 1. \end{cases}$$

Discute su compatibilidad en función de los valores del parámetro α.

Resuelve el sistema para $\alpha = 0$, si es posible.

Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sean la recta r y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1, -1, 2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1, 2, 3)$ y contiene al vector $(0, 0, 2)$, calcula las ecuaciones de la recta r y del plano π.

Ejercicio B2

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala. En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f.

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que $f(0) = 2$, las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas y f tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si f tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx$, explicando el método utilizado.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2 - 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$ y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Ejercicio B5

Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;

b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;

c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A1.

- Matrizearen determinantearen kalkulua eta determinantea anulatzen ez den kasuak eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = -1$ eta $\alpha = 1$ kasuak eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = 0$ kasurako ebazpena (0,5 puntu).

B1.

- Matrize bat zuzen kalkulatzea (1,5 puntu).
- Beste matrizea zuzen kalkulatzea (1 puntu).

A2.

- Planoaren bektore normala zuzen kalkulatzea (0,75 puntu).
- Planoaren ekuazioa zuzen kalkulatzea (0,75 puntu).
- Zuzenaren ekuazioa zuzen kalkulatzea (1 puntu).

B2.

- Hiru planoek osatutako sistema eztabaidatzea (1,5 puntu).
- Egindako galderari zuzen erantzutea (1 puntu).

A3.

- Funtzioaren deribatua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- Gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- f-ren asintotak zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- $x = 0$ puntuko zuzen ukitzailea zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- f-ren adierazpen grafikoa (0,5 puntu).

B3.

- A, B eta C parametroak zuzen kalkulatzea (1,5 puntu).
- $x = -1$ puntuko muturraren azterketa (0,5 puntu).
- $x = 5$ puntuko muturraren azterketa (0,5 puntu).

A4.

- Zatikako integrazioaren metodoaren azalpena (0,5 puntu).
- Lehen zatikako integrazioa zuzen kalkulatzea (1 puntu).
- Bigarren zatikako integrazioa zuzen kalkulatzea (1 puntu).

B4.

- Eremua ondo marraztea, eta grafikoen ebaki-puntuak kalkulatzea. (1,5 puntu).
- Eremuaren azalera kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz (1 puntu).

A5.

- Ariketa zuzen planteatzea (0,5 puntu).
- a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

B5.

- Probabilitate-eredua identifikatzea (0,5 puntu).
- a) atala zuzen ebaztea (0,75 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (0,75 puntu).
- c) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2,5 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.
7. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

A1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos en los que no se anula el determinante (1 punto).
- Discusión para los casos de $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$ (1 punto).
- Resolución para el caso $\alpha = 0$ (0,5 puntos).

B1.

- Cálculo correcto de una de las matrices (1,5 puntos).
- Cálculo correcto de la otra matriz (1 punto).

A2.

- Cálculo correcto del vector normal del plano (0,75 puntos).
- Cálculo correcto de la ecuación del plano (0,75 puntos).
- Cálculo correcto de la ecuación de la recta (1 punto).

B2.

- Discusión del sistema formado por los tres planos (1,5 puntos).
- Resolución correcta de la pregunta formulada (1 punto).

A3.

- Cálculo correcto de la derivada de la función (0,5 puntos).
- Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (0,5 puntos).
- Cálculo de las asíntotas de f (0,5 puntos).
- Cálculo de la recta tangente en $x = 0$ (0,5 puntos).
- Representación gráfica de f (0,5 puntos).

B3.

- Cálculo correcto de los parámetros A, B y C (1,5 puntos).
- Análisis del extremo en $x = -1$ (0,5 puntos).
- Análisis del extremo en $x = 5$ (0,5 puntos).

A4.

- Explicación del método de integración por partes (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la primera integración por partes (1 punto).
- Cálculo correcto de la segunda integración por partes (1 punto).

B4.

- Dibujo adecuado del recinto y cálculo de los puntos de corte de las gráficas (1,5 puntos).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1 punto).

A5.

- Planteamiento correcto del ejercicio (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado a) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado b) (1 punto).

B5.

- Identificar el modelo de probabilidad (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado a) (0,75 puntos).
- Resolución correcta del apartado b) (0,75 puntos).
- Resolución correcta del apartado c) (0,5 puntos).

ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Koefizienteen matrizearen determinantea $-\alpha^2+1$ da. Orduan, $\alpha \neq 1$ eta $\alpha \neq -1$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$\alpha = 1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta baita ere matrize zabalduarena; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da.

$\alpha = -1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena, aldiz, 3; beraz, sistema BATERAEZINA da.

$\alpha = 0$ bada, sistemaren soluzioa $x=-2$, $y=6$ eta $z=5$ da.

B1 EBAZPENA

$A+B$ matrizea 2z biderkatzen da, eta emaitza $3A-2B$-ri batzen zaio, hau lortzeko:

$$3A-2B+2(A+B)=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 16 & 4 & 18\\ 4 & 12 & 4 & 22\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ 5A=\begin{pmatrix}10 & 0 & 10 & 15\\ 0 & 30 & 0 & 40\end{pmatrix}\Longrightarrow\ A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

Orduan,

$$B=A+B-A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 0 & 6\\ 2 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$3(A+B)-(3A-2B)=5B$ kalkulatzen has daiteke ere.

A2 EBAZPENA

π planoaren P eta Q puntuek definitzen duten bektorea $(0,3,1)$ da, eta $(0,0,2)$ bektorea planoaren beste bektore bat da; beraz, π planoaren bektore normala hau da:

$$\vec{n}=(0,3,1)\times(0,0,2)=(6,0,0).$$

Gainera, π P puntutik pasatzen da; beraz, π-ren ekuazioa $x-1=0$ da.

Zuzena eta planoa perpendikularrak direnez, zuzenaren norabide-bektorea planoaren bektore normal bat da, adibidez, $(1, 0, 0)$. r P puntutik pasatzen denez, hauek dira zuzenaren ekuazio parametrikoak:

$$\{x = 1 + t,\ y = -1,\ z = 2\}.$$

B2 EBAZPENA

Hiru planoek ekuazio-sistema hau osatzen dute:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 4z = 2, \\ x - y - z = 2, \\ x + ay + z = b. \end{cases}$$

Hiru planoek zuzen batean elkar ebakitzeko, sistemak bateragarri indeterminatua izan behar du. M koefizienteen matrizea eta M^* matrize zabaldua badira, aurreko sistema bateragarri indeterminatua izateko M-ren heinak eta M^* matrizearenak berdinak izan behar dute, eta ezezagun kopurua baino txikiagoak.

Kasu honetan, a eta b parametroen edozein baliotarako, M-ren heina, M^*-ren heina eta ezezagun kopurua 3 dira; beraz, hiru planoek puntu batean ebakitzen dute elkar, ez zuzen batean.

Ez dago a eta b parametroen baliorik hiru planoek zuzen batean elkar ebaki dezaten.

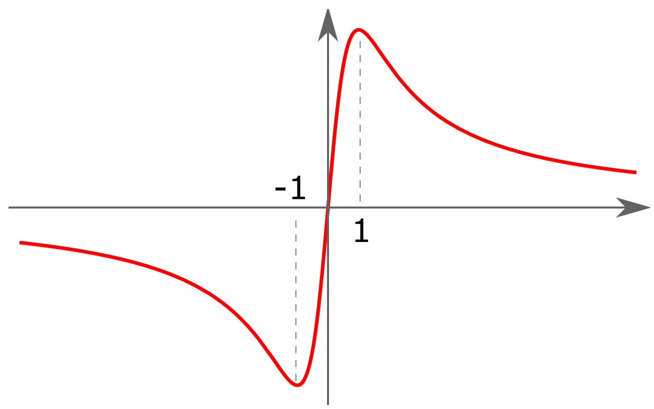
A3 EBAZPENA

$f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$ da; beraz, f beherakorra da $(-\infty, -1)$ eta $(1, +\infty)$ tarteetan; eta gorakorra da $(-1, 1)$ tartean.

f-k ez dauka asintota bertikalik eta $y = 0$ asintota horizontala da $-\infty$-n eta $+\infty$-n.

f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea $x = 0$ abszisa duen puntuan $y = x$ da.

f-ren grafikoa honako hau da:



B3 EBAZPENA

$f(0) = C$ denez, $C = 2$ da. Bestalde, $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ da, eta f-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = 1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan paraleloak izan daitezen hau bete behar da: $f'(1) = f'(3)$; beraz, $3+2A+B = 27 + 6A + B$ izan behar du, eta hortikik $A = -6$ lortzen da.

Azkenik, f-k mutur bat izango du $x = -1$ abszisa duen puntuan baldin eta $f'(-1) = 15 + B = 0$ bada, hau da, $B = -15$ bada.

Beraz, $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ da; $f'(x) = 3(x + 1)(x - 5)$ da, eta $f''(x) = 6x - 12$. Ondorioz, f-k maximo erlatibo bat du $x = -1$ puntuan eta minimo erlatibo bat $x = 5$ puntuan.

A4 EBAZPENA

Zatikako integrazioa erabiliko dugu $u = x^2+1$ eta $dv = e^{x+1}\,dx$ hartuz. Horrela, $du = 2x\,dx$ eta $v = e^{x+1}$ dugu, eta

$$\int (x^2 + 1)e^{x+1}\,dx = (x^2 + 1)e^{x+1} - \int 2xe^{x+1}\,dx.$$

Berriro, zatikako integrazioa erabiliko dugu; orain, $u = 2x$ eta $dv = e^{x+1}\,dx$ hartuz. Orduan, $du = 2\,dx$ eta $v = e^{x+1}$ ditugu, eta

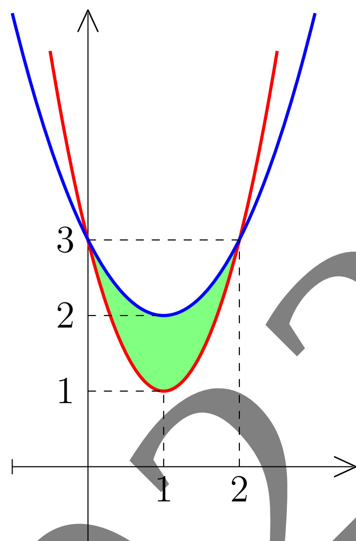
$$\int 2xe^{x+1}\,dx = 2xe^{x+1} - 2\int e^{x+1}\,dx = 2xe^{x+1} - 2e^{x+1} + k.$$

Bi emaitzak lotuz,

$$\int (x^2 + 1)e^{x+1}\,dx = (x^2 - 2x + 3)e^{x+1} + k.$$

B4 EBAZPENA

Bi parabolek mugatzen duten eremua honako hau da:



Eremu horren azalera honela kalkulatzen da:

$$A = \int_0^2 \left((x^2 - 2x + 3) - (2x^2 - 4x + 3) \right) dx = \frac{4}{3}\,\text{u}^2.$$

A5 EBAZPENA

Probabilitate-kalkuluko ariketa da, zuhaitz-diagramaren bidez eta probabilitate baldintzatuaren bidez ebazten dena.

Izan bedi (1-2) gertaera lehen jaurtiketan 1 bat eta bigarrenean 2 bat lortzea.

a) $P(1-2) = P(\text{trukatua})P(1-2 \mid \text{trukatua}) + P(\text{normala})P(1-2 \mid \text{normala})$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}.$$

b) $$P(\text{trukatua} \mid 1-2) = \frac{P(\text{trukatua})P(1-2 \mid \text{trukatua})}{P(1-2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}.$$

B5 EBAZPENA

Aurkien kopurua, X, aldagai diskretua da eta banaketa binomial bati jarraitzen dio, $B(500; 0{,}5)$. $np = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \geq 5$ eta $nq = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \geq 5$ direnez, banaketa normal baten bidez hurbiltzen da, $N(250; 11,18)$.

a) $P(X > 240) = P(X' \geq 240,5) = P\big(Z \geq \dfrac{240{,}5 - 250}{11,18}\big)$

$= P(Z \geq -0,85) = P(Z \leq 0,85) = 0,8023$.

b) $P(X < 230) = P(X' \leq 229,5) = P\big(Z \leq \dfrac{229,5 - 250}{11,18}\big)$

$= P(Z \leq -1,83) = 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336$.

c) $P(230 \leq X \leq 240) = P(X \leq 240) - P(X < 230)$

$= 1 - P(X > 240) - P(X < 230) = 1 - 0,8023 - 0,0336 = 0,1641$.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $-\alpha^2+1$. Entonces, si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y también el de la matriz ampliada; por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Si $\alpha = -1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada, en cambio, es 3; por tanto, el sistema es INCOMPATIBLE.

Si $\alpha = 0$, la solución del sistema es $x=-2$, $y=6$ y $z=5$.

SOLUCIÓN B1

Multiplicamos la matriz $A+B$ por 2 y sumamos el resultado a $3A-2B$ para obtener

$$3A-2B+2(A+B) = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 16 & 4 & 18 \\ 4 & 12 & 4 & 22 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow 5A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 30 & 0 & 40 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$B = A+B-A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

También se puede empezar calculando $3(A+B)-(3A-2B)=5B$.

SOLUCIÓN A2

Los puntos P y Q del plano π definen el vector $(0,3,1)$ y $(0,0,2)$ es otro vector del plano, por tanto, el vector normal al plano π es:

$$\vec{n} = (0,3,1) \times (0,0,2) = (6,0,0).$$

Además, π pasa por el punto P, por tanto, la ecuación de π es $x-1=0$.

Como la recta y el plano son perpendiculares, el vector director de la recta es un vector normal al plano, por ejemplo, $(1,0,0)$. Como r pasa por el punto P, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\{x = 1+t,\ y=-1,\ z=2\}.$$

SOLUCIÓN B2

Los tres planos forman el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x+2y-4z=2, \\ x-y-z=2, \\ x+ay+z=b. \end{cases}$$

Para que los tres planos se corten en una recta, el sistema debe ser compatible indeterminado. Si M es la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada, para que el sistema anterior sea compatible indeterminado, el rango de M y el de M^* deben ser iguales y menores que el número de incógnitas.

En este caso, para cualesquiera valores de a y b, el rango de M, el rango de M^* y el número de incógnitas es 3; por tanto, los tres planos se cortan en un punto, no en una recta.

Por tanto, no existen valores de los parámetros a y b de forma que los tres planos se corten en una recta.

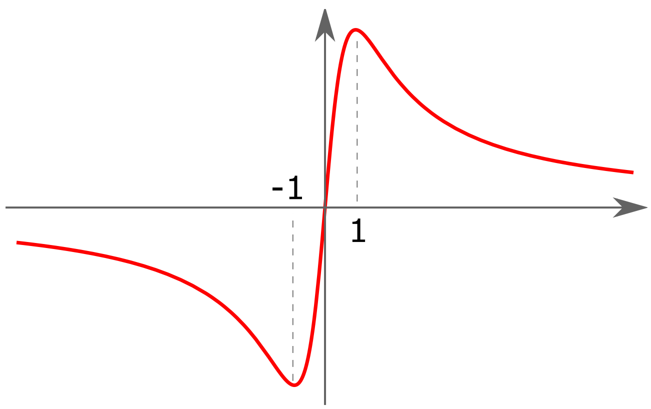
SOLUCIÓN A3

$f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, por tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$; y es creciente en el intervalo $(-1,1)$.

f no tiene asíntotas verticales e $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=x$.

La gráfica de f es



SOLUCIÓN B3

Como $f(0) = C$, se tiene $C = 2$. Por otro lado, $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$, y para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas, debe cumplirse que $f'(1) = f'(3)$, por tanto, debe ser $3 + 2A + B = 27 + 6A + B$, y de ahí se obtiene $A = -6$.

Por último, f tendrá un extremo en el punto de abscisa $x = -1$ si $f'(-1) = 15 + B = 0$, es decir, si $B = -15$.

Por tanto, $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$; $f'(x) = 3(x+1)(x-5)$, y $f''(x) = 6x - 12$. En consecuencia, f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 5$.

SOLUCIÓN A4

Utilizamos integración por partes, tomando $u = x^2 + 1$ y $dv = e^{x+1}\,dx$. Así, tenemos $du = 2x\,dx$ y $v = e^{x+1}$, de modo que

$$\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx = (x^2+1)e^{x+1} - \int 2xe^{x+1}\,dx.$$

De nuevo, utilizamos integración por partes, tomando ahora $u = 2x$ y $dv = e^{x+1}\,dx$. Entonces, $du = 2\,dx$ y $v = e^{x+1}$, de forma que

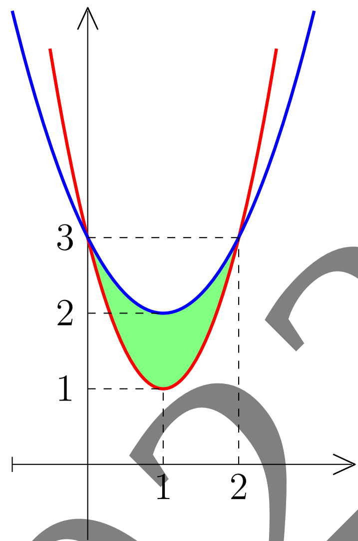
$$\int 2xe^{x+1}\,dx = 2xe^{x+1} - 2\int e^{x+1}\,dx = 2xe^{x+1} - 2e^{x+1} + k.$$

Uniendo los dos resultados,

$$\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx = (x^2 - 2x + 3)e^{x+1} + k.$$

SOLUCIÓN B4

El recinto acotado por las dos parábolas es el siguiente:



El área de ese recinto se calcula así:

$$A = \int_0^2 \big((x^2 - 2x + 3) - (2x^2 - 4x + 3)\big)\, dx = \frac{4}{3}\,\text{u}^2.$$

SOLUCIÓN A5

Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

Sea el suceso (1-2) obtener en la primera tirada un 1 y en la segunda tirada un 2.

a) $P(1-2) = P(\text{trucado})P(1-2 \mid \text{trucado}) + P(\text{normal})P(1-2 \mid \text{normal})$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}.$$

b) $$P(\text{trucado} \mid 1-2) = \frac{P(\text{trucado})P(1-2 \mid \text{trucado})}{P(1-2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}.$$

SOLUCIÓN B5

La variable número de caras, X, es discreta y sigue una distribución binomial $B(500; 0{,}5)$. Como $np = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \geq 5$ y $nq = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \geq 5$, se aproxima por una distribución normal $N(250; 11,18)$.

a) $P(X > 240) = P(X' \geq 240,5) = P\Big(Z \geq \dfrac{240{,}5 - 250}{11,18}\Big)$
$= P(Z \geq -0,85) = P(Z \leq 0,85) = 0,8023$.

b) $P(X < 230) = P(X' \leq 229,5) = P\Big(Z \leq \dfrac{229,5 - 250}{11,18}\Big)$
$= P(Z \leq -1,83) = 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336$.

c) $P(230 \leq X \leq 240) = P(X \leq 240) - P(X < 230)$
$= 1 - P(X > 240) - P(X < 230) = 1 - 0,8023 - 0,0336 = 0,1641$.