Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

EAU 2023 USE

www.ehu.eus

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2023ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- ***Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta.***
  Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.
- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

- ***Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques.***
  De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.
- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de trasmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

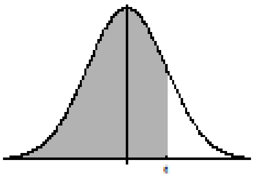
2023ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

Izan bitez *A* eta *B* honako matrize hauek: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $[\![\ \boldsymbol{0,75\ puntu}]\!]$ Egiazta ezazu *B* matrizea *A* matrizearen alderantzizkoa dela.

b) $[\![\ \boldsymbol{0,75\ puntu}]\!]$ Kalkula ezazu $(\ A - 2\ I_2)^2$ matrizea, non $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den.

c) $[\![\ \boldsymbol{1\ puntu}]\!]$ Zehaztu ezazu X matrizea, non $A \cdot X = B$ den.

B.1. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

Matematika azterketa batean problema hau proposatzen da:

"*Adieraz ezazu non lortzen duen minimoa* $F(x,\ y) = 6x + 3y - 2$ *funtzioak, honako murrizketa hauek zehaztutako eskualdean:*

$$2x + y \geq 6\ ;\ \ 2x + 5y \leq 30\ ;\ \ 2x - y \leq 6\text{"}$$

a) $[\![\ \boldsymbol{2,2\ puntu}]\!]$ Jimenak funtzioaren minimoa (1, 2) puntuan lortzen dela erantzun du, eta Ivánek, berriz, (3, 0) puntuan.

- Egia al da funtzioaren minimoa (1, 2) puntuan lortzen dela?
- Zehatza al da Ivánen erantzuna?

Arrazoitu zure erantzunak.

b) $[\![\ \boldsymbol{0,3\ puntu}]\!]$ Zenbat balio du aipatutako minimo horrek?

BLOKEA: ANALISIA

A.2. $[\![\, gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Honako $I(t)$ funtzio honek adierazten du zer irabazi/galera (milaka eurotan) izan dituen enpresa batek sortu zenetik:

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1}\ , \quad t \geq 0$$

non t igarotako denbora (urtetan), eta $I(t)$ irabaziak/galerak diren.

- **a)** $[\![\, 0,4\ puntu]\!]$ Egin ezazu $I(t)$ funtzioaren adierazpen grafikoa.
- **b)** $[\![\, 0,3\ puntu]\!]$ Zenbat izan zen hasierako inbertsioa (hasierako kapitala)?
- **c)** $[\![\, 0,3\ puntu]\!]$ Zein urtetan irabazi du 5.600 €?
- **d)** $[\![\, 0,5\ puntu]\!]$ Zein urtetatik aurrera hasten da enpresa irabaziak lortzen?
- **e)** $[\![\, 0,3\ puntu]\!]$ Aztertu funtzioaren eboluzioa (gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak).
- **f)** $[\![\, 0,7\ puntu]\!]$ Horrela jarraituz gero, zein da irabazien/galeren bilakaeraren joera? Funtzioaren ezaugarriren batekin lotzen duzu?

B.2. $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Izan bedi $f(x)$ funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & baldin\ eta\quad x \leq 0 \quad bada \\ x - 1 & baldin\ eta\quad 0 < x < 2 \quad bada \\ bx - 5 & baldin\ eta\quad x \geq 2 \quad bada \end{cases}$$

- **a)** $[\![\, 1,2\ puntu]\!]$ Aurkitu itzazu a eta b parametroen balioak $f(x)$ funtzioa $\mathbb{R}$ zenbaki errealen multzoan jarraitua izan dadin.
- **b)** $[\![\, 0,5\ puntu]\!]$ $a = 0$ eta $b = 3$ kasuan, egin ezazu $f(x)$ funtzioaren adierazpen grafikoa.
- **c)** $[\![\, 0,8\ puntu]\!]$ $a = 0$ eta $b = 3$ kasuan, kalkula ezazu $f(x)$ funtzioaren grafikoak, *OX* abzisa-ardatzak, eta $x = 1$ eta $x = 3$ zuzenek mugatutako eskualdearen azalera.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2023ko EZOHIKOA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2023

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Gorka, futbol talde jakin bateko jokalaria, titular izan da ligako partiduen % 80tan. Beraren taldeak Gorka titular izan den partiduen % 40 irabazi ditu; eta titular izan ez denean, taldeak partiduen % 45 irabazi ditu.

- **a)** $[\![\ 0,8\ puntu]\!]$ Zein da taldeak partidu bat irabazteko probabilitatea?
- **b)** $[\![\ 0,6\ puntu]\!]$ Taldeak irabazi duela jakinda, zein da Gorka titular izanaren probabilitatea?
- **c)** $[\![\ 0,6\ puntu]\!]$ Kalkula ezazu Gorka titular ez izateko eta taldeak irabazteko probabilitatea.
- **d)** $[\![\ 0,5\ puntu]\!]$ “Titular izatea” eta “partidua irabaztea” gertaerak askeak dira? Arrazoitu ezazu zure erantzuna.

B.3. $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Kutxa batek 5 bola gorri eta 3 berde ditu. Bola bat atera eta beste koloreko bi bolarekin ordezkatzen da. Ondoren, bigarren bola bat ateratzen da.

Kalkula itzazu:

- **a)** $[\![1,4\ puntu]\!]$ Ateratako bigarren bola berdea izateko probabilitatea.
- **b)** $[\![1,1\ puntu]\!]$ Ateratako lehenengo bola gorria izanaren probabilitatea, jakinda bigarren bola gorria izan dela.

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

Marka jakin bateko txokolatezko tableten pisu garbia aldagai aleatorio bat da, eta μ batezbesteko ezezaguna eta 7 gramoko desbideratze tipikoa dituen banaketa normal bati jarraitzen dio.

Badakigu zoriz aukeratutako 36 txokolatezko tabletak guztira 5.274 gramoko pisua eman dutela.

a) $[\![\boldsymbol{1,7\ puntu}]\!]$ Kalkula ezazu μ batezbestekorako konfiantza tartea, % 94ko konfiantza-mailaz.

b) $[\![\boldsymbol{0,8\ puntu}]\!]$ Konfiantza-maila beraz, gutxienez zenbat tableta hartu beharko dira lagintzat, lortuko den konfiantza tartearen zabalera, gehienez, 3 gramo izan dadin?

B.4. $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu}]\!]$

A jokalariak txanpon orekatu batekin jaurtiketak egiten ditu, eta B jokalariak, berriz, txanpon trukatu batekin. Txanpon trukatu horrekin aurpegia lortzeko probabilitatea 0,4 da.

Jaurtiketa horiekin lotuta, honako banaketa binomial hauek jarraitzen dituzten aldagaiak definitzen ditugu:

- X: A jokalariak $\boldsymbol{n}$ jaurtiketatan lortutako aurpegi kopurua, $\boldsymbol{X \equiv B\ (n,\ p\ )}$
  - $n = txanpon\ orekatuarekin\ egindako\ jaurtiketa\ kopurua$.
  - $p =\ txanpon\ orekatuarekin\ aurpegia\ ateratzeko\ probabilitatea.$

- Y: B jokalariak n' jaurtiketatan lortutako gurutze kopurua, $\boldsymbol{Y \equiv B\ (n',\ p'\ )}$
  - $n' =\ txanpon\ trukatuarekin\ egindako\ jaurtiketa\ kopurua.$
  - $p' = txapon\ trukatuarekin\ gurutzea\ ateratzeko\ probabilitatea$.

a) $[\![\boldsymbol{0,6\ puntu}]\!]$ Kalkula ezazu A jokalariak bere txanpon orekatuarekin 3 jaurtiketatan 3 aurpegi lortzeko probabilitatea.

b) $[\![\boldsymbol{0,6\ puntu}]\!]$ Kalkula ezazu B jokalariak bere txanpon trukatuarekin bi jaurtiketatan 2 gurutze lortzeko probabilitatea.

c) $[\![\mathbf{1,3}\ \boldsymbol{puntu}]\!]$ Zeinek du probabilitate altuagoa, A jokalariak 400 jaurtiketatan bere txanpon orekatuarekin 190 aurpegi baino gutxiago lortzeak ala B jokalariak 200 jaurtiketatan bere txanpon trukatuarekin 110 gurutze baino gutxiago lortzeak? **Arrazoitu ezazu erantzuna**.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2023ko EZOHIKOA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2023

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

- **a)** $[\![\ \mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Comprueba que la matriz *B* es la inversa de la matriz *A*.
- **b)** $[\![\ \mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Calcula la matriz $(A - 2\,I_2)^2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **c)** $[\![\ \mathbf{1}\ \boldsymbol{punto}]\!]$ Calcula la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

B.1. $[\![\boldsymbol{hasta\ 2\ ,5\ puntos}]\!]$

En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

"Indica dónde alcanza el mínimo la función $F(x,\ y) = 6x + 3y - 2$ *, en la región determinada por las siguientes restricciones:*

$$2x + y \geq 6\ ;\ \ 2x + 5y \leq 30\ ;\ \ 2x - y \leq 6\ ."$$

- **a)** $[\![\ \mathbf{2,2}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Jimena responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1,\ 2)$ e Iván, por el contrario, que lo hace en el punto $(3,\ 0)$.
  - ¿Es cierto que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1,\ 2)$?.
  - ¿Es exacta la respuesta de Iván?

  Razona tus respuestas.
- **b)** $[\![\ \mathbf{0,3}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Cuánto vale dicho mínimo?

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2023ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. $[\![\textit{hasta } 2,5 \ \textit{puntos}]\!]$

La siguiente función $I(t)$ representa las ganancias/pérdidas (en miles de euros) de una empresa desde que se fundó:

$$I(t) = \frac{8t-16}{t+1}, \qquad t \geq 0$$

donde t es el tiempo pasado (en años), e $I(t)$ son las ganancias/pérdidas.

a) $[\![0,4 \ \textit{puntos}]\!]$ Realiza la representación gráfica de la función $I(t)$.

b) $[\![0,3 \ \textit{puntos}]\!]$ ¿Cuánto fue la inversión inicial (capital inicial)?

c) $[\![0,3 \ \textit{puntos}]\!]$ ¿En qué año ganó 5.600 €?

d) $[\![0,5 \ \textit{puntos}]\!]$ ¿A partir de qué año la empresa comienza a obtener ganancias?

e) $[\![0,3 \ \textit{puntos}]\!]$ Analiza la evolución de la función (intervalos de crecimiento y decrecimiento).

f) $[\![0,7 \ \textit{puntos}]\!]$ En caso de seguir así, ¿cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?

B.2. $[\![\textit{hasta } 2,5 \ \textit{puntos}]\!]$

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2x-a & si \quad x \leq 0 \\ x-1 & si \quad 0 < x < 2 \\ bx-5 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) $[\![1,2 \ \textit{puntos}]\!]$ Halla los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

b) $[\![0,5 \ \textit{puntos}]\!]$ Representa la gráfica de la función $f(x)$ para los valores de los parámetros $a = 0$ y $b = 3$.

c) $[\![0,8 \ \textit{puntos}]\!]$ Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas *OX*, y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. $[\![\textit{hasta } 2{,}5 \textit{ puntos}]\!]$

Gorka, jugador de un equipo de fútbol, ha sido titular en un 80 % de los partidos de la liga. Su equipo ha ganado un 40 % de los partidos en los que Gorka ha sido titular; y cuando no lo ha sido, su equipo ha ganado un 45 % de los partidos.

a) $[\![\, 0{,}8 \textit{ puntos}]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo gane un partido?

b) $[\![\, 0{,}6 \textit{ puntos}]\!]$ Sabiendo que ha ganado su equipo, ¿cuál es la probabilidad de que Gorka haya sido titular?

c) $[\![\, 0{,}6 \textit{ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que Gorka no sea titular y que su equipo gane el partido.

d) $[\![\, 0{,}5 \textit{ puntos}]\!]$ ¿Los sucesos "ser titular" y "ganar el partido" son sucesos independientes? Razona tu respuesta.

B.3. $[\![\textit{hasta } 2{,}5 \textit{ puntos}]\!]$

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola.

Calcula:

a) $[\![1{,}4 \textit{ puntos}]\!]$ La probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

b) $[\![1{,}1 \textit{ puntos}]\!]$ La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja, sabiendo que la segunda bola ha sido roja.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK	*PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2023ko EZOHIKOA	*EXTRAORDINARIA 2023*
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	*MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II*

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

El peso neto de las tabletas de chocolate de una determinada marca es una variable aleatoria normal con media desconocida μ y desviación típica 7 gramos. Sabemos que 36 tabletas de chocolate, elegidas al azar, han dado un peso total de 5.274 gramos.

a) $[\![\boldsymbol{1,7\ puntos}]\!]$ Calcula el intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza del 94 %.

b) $[\![\boldsymbol{0,8\ puntos}]\!]$ Con el mismo nivel de confianza, ¿cuántas tabletas, como mínimo, habrá que tomar en la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos?

B.4. $[\![\boldsymbol{\ hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Un jugador A realiza lanzamientos con una moneda equilibrada, mientras que otro jugador B lo hace con una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara con la moneda trucada es 0,4. Asociadas a dichos lanzamientos se definen las variables que siguen las siguientes distribuciones binomiales:

- X: número de caras que obtiene el jugador A en n lanzamientos, $\boldsymbol{X \equiv B\ (n, p)}$
  - $n = número\ de\ lanzamientos\ con\ la\ moneda\ equilibrada.$
  - $p = probabilidad\ de\ obtener\ cara\ \ con\ la\ moneda\ equilibrada.$
- Y: número de cruces que obtiene el jugador B en $n^{'}$ lanzamientos, $\boldsymbol{Y \equiv B\ (n^{'}, p^{'})}$
  - $n^{'} = número\ de\ lanzamientos\ con\ la\ moneda\ trucada.$
  - $p^{'} = probabilidad\ de\ obtener\ cruz\ \ con\ la\ moneda\ trucada.$

a) $[\![\boldsymbol{\ 0,6\ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que el jugador A obtenga 3 caras en 3 lanzamientos con su moneda equilibrada.

b) $[\![\boldsymbol{\ 0,6\ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que el jugador B obtenga 2 cruces en 2 lanzamientos con su moneda trucada.

c) $[\![1,3 \ \ puntos]\!]$ ¿Qué es más probable, que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada o que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda trucada? **Justifica la respuesta.**

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen está compuesto de ocho ejercicios.

2. ***De estos ocho ejercicios se tiene que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.***

3. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

4. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.

5. Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.

6. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, …, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

BLOQUE: ÁLGEBRA

Problema A.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,75 puntos

- 1ª forma
  - Definición de la inversa, **0,25 puntos.**
  - Cálculo de la matriz $B \cdot A$, **0,25 puntos.**
  - Cálculo de la matriz $A \cdot B$, **0,25 puntos.**
- 2ª forma
  - Determinante de A , **0,15 puntos.**
  - Adjuntos, **0,5 puntos.**
  - Cálculo de la matriz inversa de A, **0,1 puntos.**

b. 0,75 puntos

- Cálculo de la matriz $A - 2\,I_2$, **0,25 puntos.**
- Calcular la matriz $(A - 2\,I_2)^2$, **0,5 puntos.**

c. 1 punto

- Obtener la expresión para determinar *X*, **0,25 puntos.**
  - **1. forma**
    - Cálculo de la matriz B^2, **0,75 puntos.**
  - **2. forma**
    - Cálculo de la matriz A^{-1}, **0,5 puntos.**
    - Cálculo de la matriz $A^{-1} \cdot B$, **0,25 puntos.**

Problema B.1 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 2,2 puntos

- Concretar la función objetivo, **0,1 puntos.**
- Determinar las restricciones, **0,3 puntos.**
- Determinar y representar la región factible.
  - Representación de cada restricción, 0,1 puntos, por lo tanto, **0,3 puntos.**
  - Determinar la región factible, **0,3 puntos.**
- Concretar los vértices de la región factible, **0,2 puntos.**
- Valorar la función en los vértices, **0,3 puntos.**
- Respuesta a la expresión de Jimena, bien razonada, **0,3 puntos.**
- Respuesta a la expresión de Iván, bien razonada, **0,4 puntos.**

b. 0,3 puntos

- Valorar la función en ese punto mínimo, **0,3 puntos.**

BLOQUE: ANÁLISIS

Problema A.2 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,4 puntos

- Representación gráfica de la función $f(x)$, **0,4 puntos.**

b. 0,3 puntos

- Respuesta razonada, **0,3 puntos.**

c. 0,3 puntos

- Respuesta razonada, **0,3 puntos.**

d. 0,5 puntos

- Respuesta razonada, **0,5 puntos.**

e. 0,3 puntos

- Respuesta razonada, **0,3 puntos.**

f. 0,7 puntos

- Respuesta razonada, **0,3 puntos.**
- Relacionarlo con una característica de la función, **0,4 puntos.**

Problema B.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 1,2 puntos

- Continuidad en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$, **0,3 puntos.**
- Definir la continuidad de una función en un punto, **0,1 puntos.**
    - En el punto $x = 0$ **.**
        - Cálculo de los límites laterales, **0,2 puntos.**
        - Determinar el valor $f(0)$, **0,1 puntos.**
        - Determinar el valor del parámetro a, **0,1 puntos.**
    - En el punto $x = 2$ **.**
        - Cálculo de los límites laterales, **0,2 puntos.**
        - Determinar el valor $f(2)$, **0,1 puntos.**
        - Determinar el valor del parámetro b, **0,1 puntos.**

b. 0,5 puntos

- Representación gráfica de la función, **0,5 puntos.**

c. 0,8 puntos

- Determinar las integrales definidas $\boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_2}$, **0,2 puntos.**
- Cálculo de las integrales definidas**.**
    - Cálculo de la integral definida $\boldsymbol{A_1}$, **0,3 puntos.**
    - Cálculo de la integral definida $\boldsymbol{A_2}$, **0,3 puntos.**

BLOQUE: PROBABILIDAD

Problema A.3 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,8 puntos
- Hacer una tabla de contingencia o un diagrama de árbol, **0,3 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

b. 0,6 puntos
- Determinar qué tiene que calcular, **0,1 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

c. 0,6 puntos
- Determinar qué tiene que calcular, **0,1 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

d. 0,5 puntos
- Determinar en qué consiste que dos sucesos sean independientes, **0,1 puntos.**
- Cálculos, **0,2 puntos.**
- Concluir cómo son los sucesos, **0,2 puntos.**

Problema B.3 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1,4 puntos
- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,3 puntos**.
- Indicar la probabilidad total de un suceso o su fórmula, **0,4 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,7 puntos.**

b. 1,1 puntos
- Indicar la fórmula de la probabilidad a posteriori, Teorema de Bayes, **0,4 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,7 puntos.**

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema A.4 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1,7 puntos

- Determinar la media muestral, **0,4 puntos.**
- Determinar la fórmula del intervalo de confianza para la media, **0,3 puntos.**
- Determinar $z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,5 puntos.**
- El intervalo de confianza pedido, **0,5 puntos.**

b. 0,8 puntos

- Expresar qué es el error, **0,2 puntos.**
- Indicar la fórmula del error, **0,2 puntos.**
- El cálculo del tamaño de la muestra, **0,4 puntos.**

Problema B.4 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,6 puntos

- Determinar la distribución, **0,2 puntos.**
- Cálculo de $P(X = 3)$, **0,4 puntos.**

b. 0,6 puntos

- Determinar la distribución, **0,2 puntos.**
- Cálculo de $P(Y = 2)$, **0,4 puntos.**

c. 1,3 puntos

- **Jugador A.**
  - Concreción de la distribución normal a través de la aproximación de Yates, **0,15 puntos.**
  - Calculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**
- **Jugador B.**
  - Concreción de la distribución normal a través de la aproximación de Yates, **0,15 puntos.**
  - Cálculo de la probabilidad pedida **0,5 puntos.**

SOLUCIONES

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. *Cálculo matricial. Cálculo de la matriz inversa. Ecuación matricial.*

a) Comprobamos que $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$:

- $B = A^{-1} \Leftrightarrow B \cdot A = I_2 \quad \wedge \quad A \cdot B = I_2$
  - $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
  - $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Por lo tanto, $\boldsymbol{B = A^{-1}}$

OTRA MANERA

- Calculamos $\boldsymbol{A^{-1}}$:
  - $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$
  - Adjuntos
    - $A_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$
    - $A_{21} = (-1)^3 \cdot 1 = -1$
    - $A_{12} = (-1)^3 \cdot 3 = -3$
    - $A_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B \Longrightarrow \boldsymbol{B = A^{-1}}$$

b) Calculamos $(A - 2I)^2$:

$$(A-2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\,I_2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\,I_2}$$

c) Calculamos la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = B \cdot B = B^2 \Rightarrow X = B^2$$

apartado a) $A^{-1} = B$

$$X = B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

B.1. *Resolución de un problema de programación lineal con dos variables.*

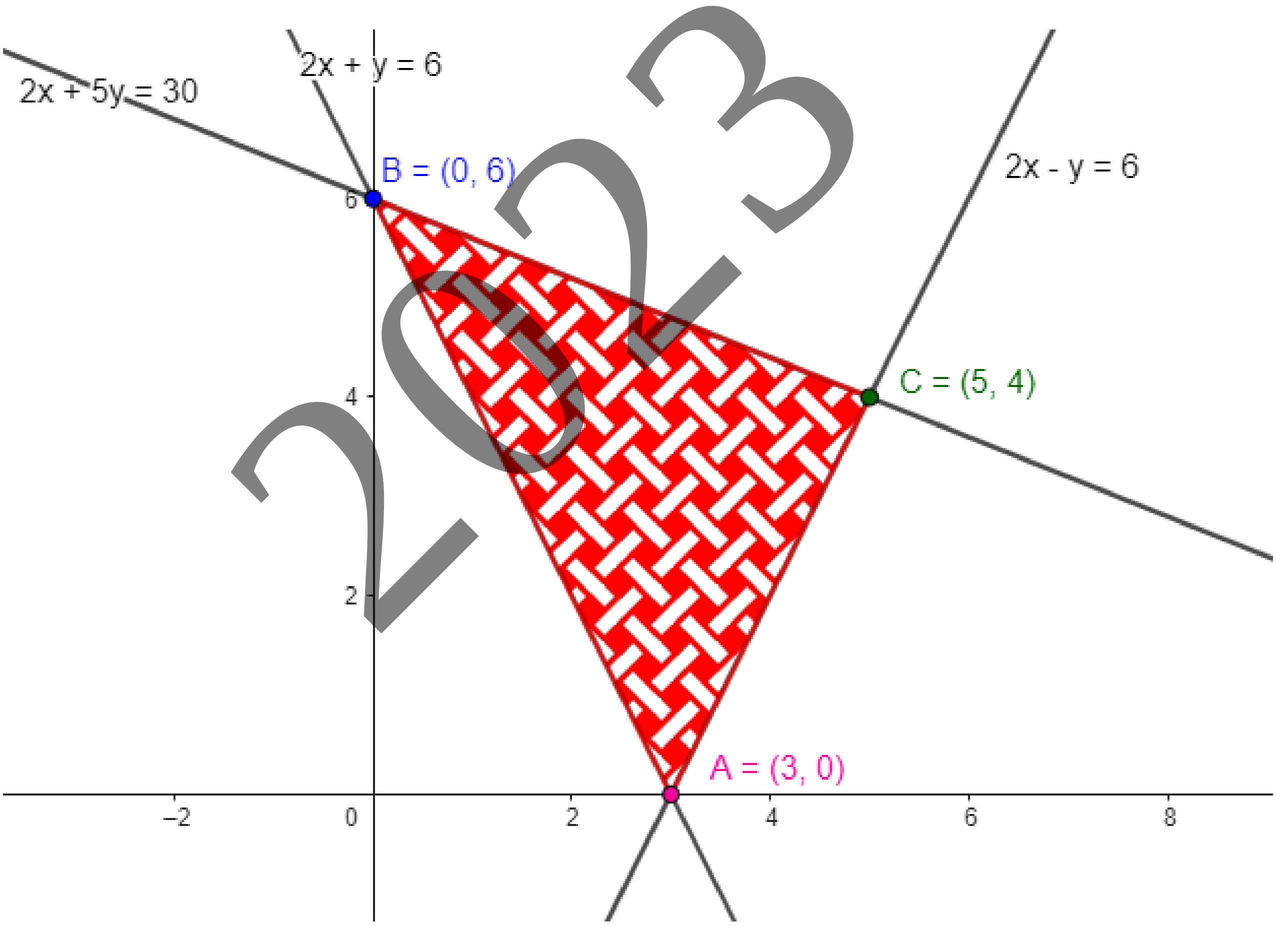
- La función objetivo es:

$F(x,\ y) = 6x + 3y - 2$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



- Los vértices del recinto son los puntos:

$A(3,\ 0)$; $B(0,\ 6)$; $C(5,\ 4)$.

- Calculamos los valores que toma la función $F(x,\ y) = 6x + 3y - 2$ en dichos puntos:

$$F(A) = F(3,\quad 0) = \ 16$$
$$F(B) = F(0,\quad 6) = \ 16$$
$$F(C) = F(5,\quad 4) = \ 40$$

a) Jimena responde que se alcanza en el punto $(1,\ 2)$ e Iván que lo hace en el punto $(3,\ 0)$.

- ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto $(1,\ 2)$?.

  No. El punto $(1,\ 2)$ no está en la región factible porque no cumple alguna de las restricciones, por lo tanto, es imposible que el mínimo se alcance en ese punto.

- ¿Es exacta la respuesta de Iván?

  No, porque el mínimo se obtiene no sólo en el punto $A(3,\ 0)$, sino en todos los puntos del segmento $\overline{AB}$. Por lo tanto, la respuesta, aun no siendo falsa, no es exacta.

b) ¿Cuánto vale dicho mínimo?

El mínimo vale 16.

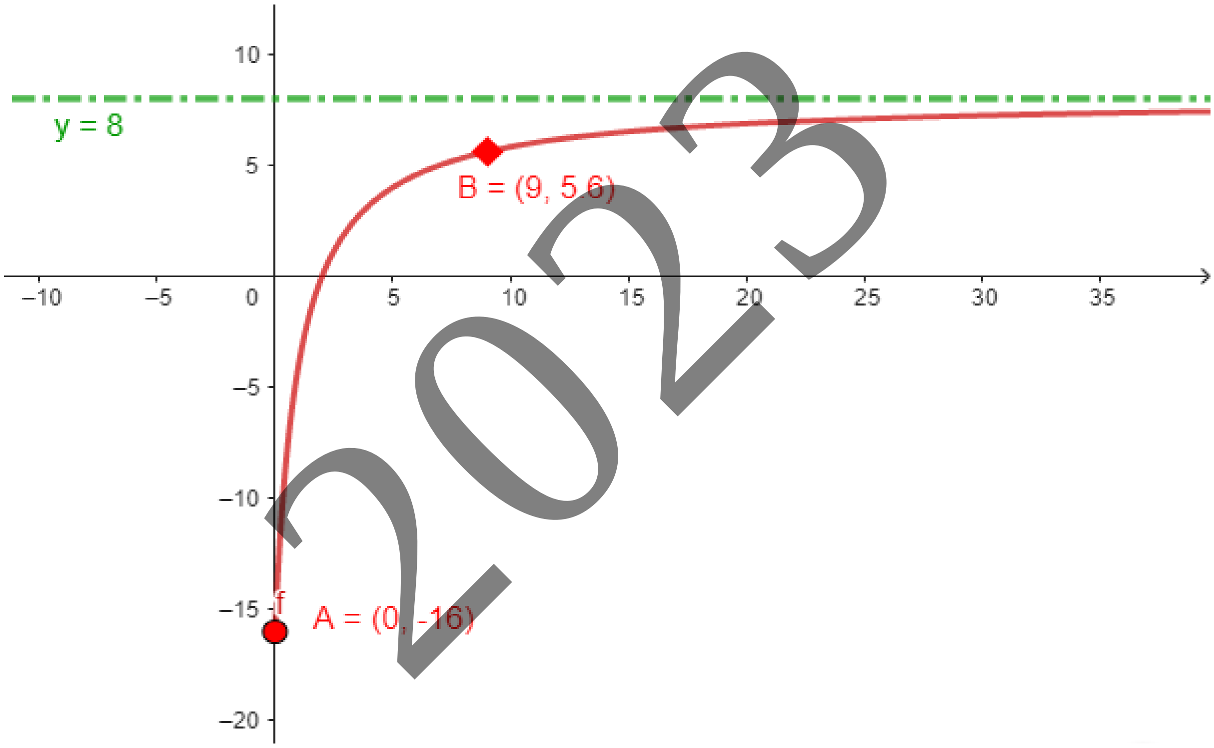
BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. *Problema de análisis de una función. Cálculo de los máximos y mínimos relativos de una función y representación gráfica. Características de la función.*

$$I(t) = \frac{8t - 16}{t + 1}, \quad t \geq 0.$$

$I(t)$ expresa las ganancias/pérdidas de la empresa (en miles de euros) en función del tiempo t (en años).

a) La representación gráfica de la función.



b) ¿Cuánto fue la inversión inicial (capital inicial)?

La inversión inicial es el valor que corresponde al valor de $I(t)$ cuando $t = 0$

$\Longrightarrow\ I(0) = -16\ \Longrightarrow$ la inversión inicial (o capital inicial) fue **16.000 €.**

Corresponde al punto A en la gráfica.

c) ¿En qué año ganó 5.600 €?

5.600 € corresponde a $I(t) = 5{,}6$, porque se mide en miles de euros.

$$I(t) = 5{,}6 = \frac{8t - 16}{t + 1} \quad \Rightarrow \quad 5{,}6\,t + 5{,}6 = 8\,t - 16 \quad \Rightarrow \quad 21{,}6 = 2{,}4\,t \quad \Rightarrow \boldsymbol{t} = \mathbf{9}$$

Por lo tanto, **es en el año t =9.**

Corresponde al punto B en la gráfica.

d) ¿A partir de qué año la empresa empieza a obtener ganancias?

$$I(t) = \frac{8t-16}{t+1} \geq 0 \;\Rightarrow\; 8t-16 \geq 0 \Rightarrow t \;\geq 2$$

A partir del segundo año $(t \;\geq 2)$.

OTRA MANERA

$$\begin{cases} I(t) = \dfrac{8t-16}{t+1} \\ \quad I(t) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{8t-16}{t+1} = 0 \;\Rightarrow\; 8t-16 = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{t = 2}$$

y $I(t)$ es creciente (en su dominio de definición) $\Rightarrow$ la empresa empezó a obtener ganancias partir del segundo año.

e) Analiza la evolución de la función (intervalos de crecimiento y decrecimiento).

La evolución siempre es positiva, porque es una función creciente en su dominio de definición $[0, \infty)$.

f) En caso de seguir así, ¿cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/perdidas? ¿Lo relacionas con alguna característica de la función?

Para analizar la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas a medida que pasan los años, calculamos el límite de la función $I(t)$ cuando t tiende a ∞. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} I(t) \;= \lim_{n\to\infty} \frac{8t-16}{t+1} = 8$$

Por lo tanto**, las ganancias/pérdidas se estabilizan alrededor de unas ganancias de 8.000 €.**

La recta $\boldsymbol{I(t) = 8}$ es una asíntota horizontal de la función y esa es la tendencia de la función a medida que pasan los años.

B.2. *Estudio de la continuidad de una función. Representación gráfica.*

$$f(x)=\begin{cases} -2x-a & si \quad x\le 0 \\ x-1 & si \quad 0<x<2 \\ bx-5 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

a) Halla los valores de a y b para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.

- **En** $\mathbb{R}-\{\mathbf{0},\mathbf{2}\}=(-\infty,\mathbf{0})\cup(\mathbf{0},\mathbf{2})\cup(\mathbf{2},\infty)$, $f(x)$ es continua por definición de la función, dado que son polinomios.
- **En $x=0$**

$$\boxed{f(x)\ \ continua\ en\ \ x=x_0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)}$$

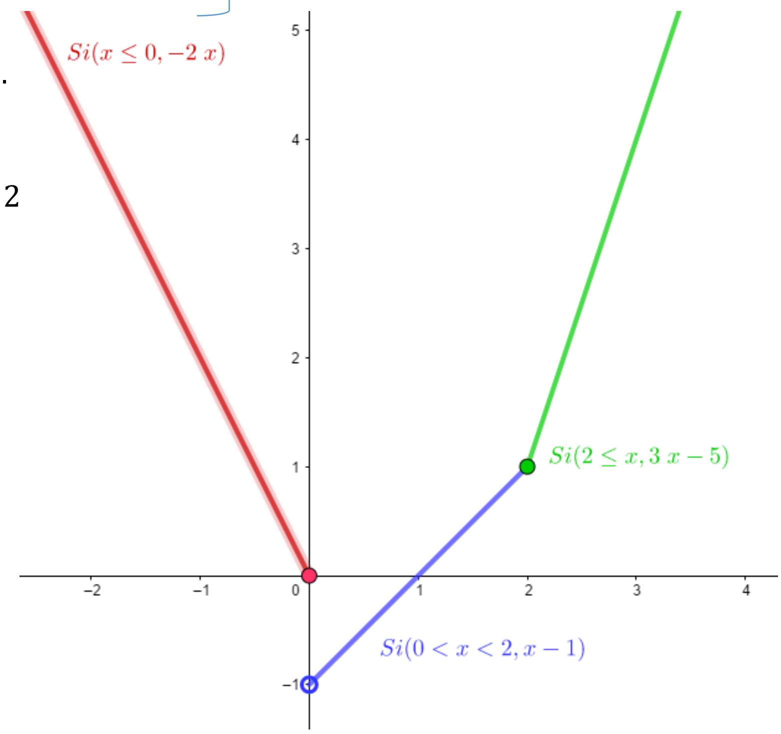
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-2x-a)=-a \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1 \\ f(0)=-a \end{array}\right\}\Rightarrow\ \boldsymbol{a=1}$$

- **En $x=2$**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)=1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(bx-5)=2b-5 \\ f(2)=2b-5 \end{array}\right\}\Rightarrow\ 2b-5=1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{b=3}$$

b) Representa la gráfica de la función.

$$f(x)=\begin{cases} -2x & si \quad x\le 0 \\ x-1 & si \quad 0<x<2 \\ 3x-5 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$



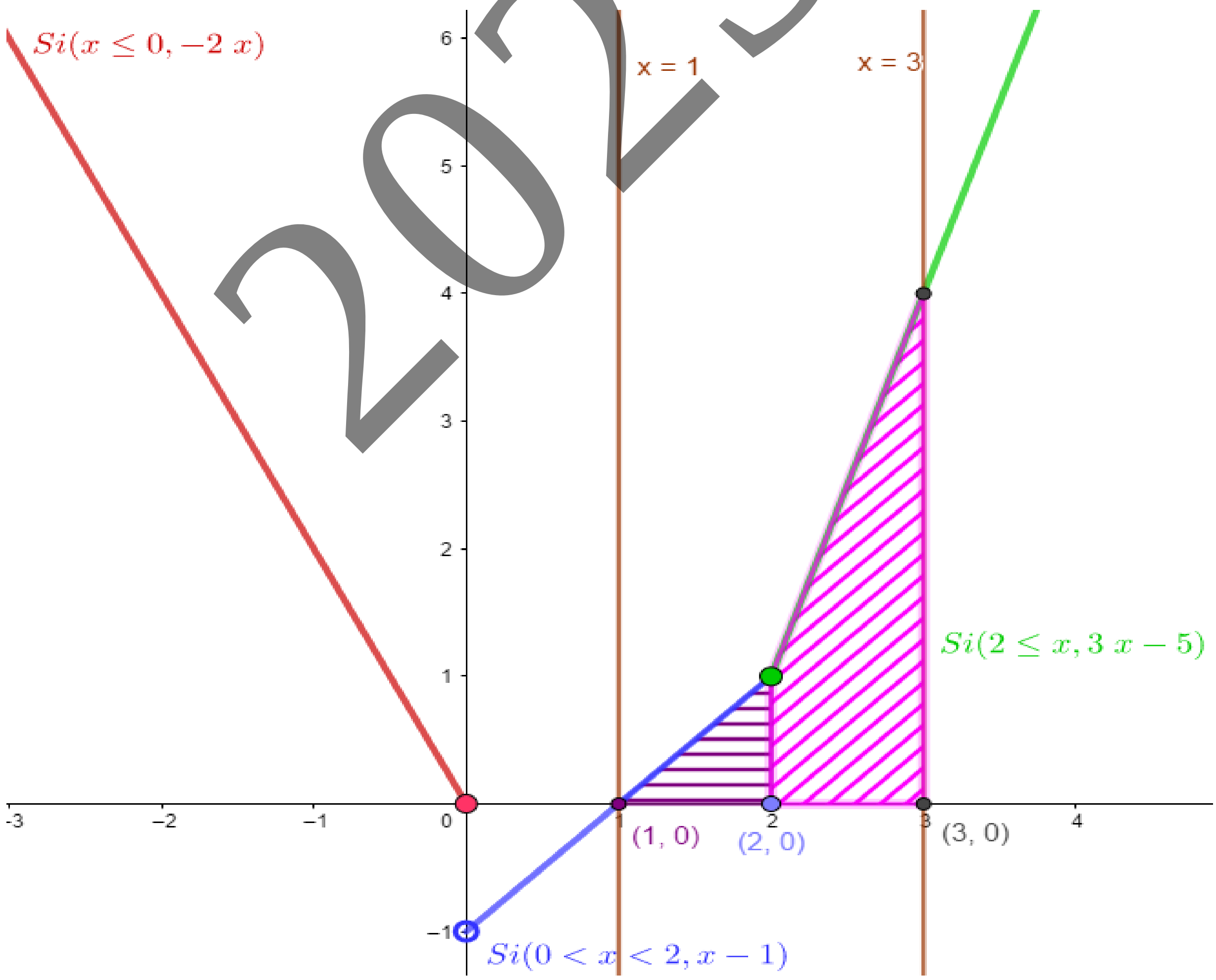
c) Calculamos el área limitada por $f(x)$, el eje de abscisas OX, y las rectas $x = 1$ y $x = 3$, cuando $a = 0$ y $b = 3$.

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 [(x-1)-0]\,dx + \int_2^3 [(3x-5)-0]\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x\right]_2^3 =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{3^3}{2} - 15\right) - \left(\frac{12}{2} - 10\right) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{27}{2} - 15 + 4 = 3u^2 \Rightarrow \boldsymbol{A = 3\,u^2}$$

Nota: Este mismo resultado también podía haberse obtenido calculando geométricamente el área a partir de la gráfica de la figura.

$$A = \left(\frac{1\cdot 1}{2}\right) + (1\cdot 1) + \left(\frac{1\cdot 3}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = \boldsymbol{3\,u^2}$$



BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse*, *a través de un diagrama de árbol o una tabla de contingencia.*

	GANAR	NO GANAR	
SER TITULAR	0,32	0,48	**0,8**
NO SER TITULAR	0,09	0,11	**0,2**
	0,41	**0,59**	**1**

a) Probabilidad de que el equipo gane un partido.

$$\boldsymbol{P(GANAR)} = 0{,}41 \implies \mathbf{41}\ \%$$

b) Probabilidad de que Gorka haya sido titular, sabiendo que su equipo ha ganado.

$$\boldsymbol{P(SER\ TITULAR \mid GANAR)} = \frac{0{,}32}{0{,}41} = 0{,}7804 \implies \mathbf{78{,}04}\ \%$$

c) Probabilidad de que Gorka no sea titular y que su equipo gane.

$$\boldsymbol{P(NO\ SER\ TITULAR\ \cap GANAR)} = 0{,}09 \implies \mathbf{9}\ \%$$

d) ¿Los sucesos "ser titular" y "ganar el partido" son sucesos independientes?

"$SER\ TITULAR$" y "$GANAR$" son sucesos independientes $\Leftrightarrow$

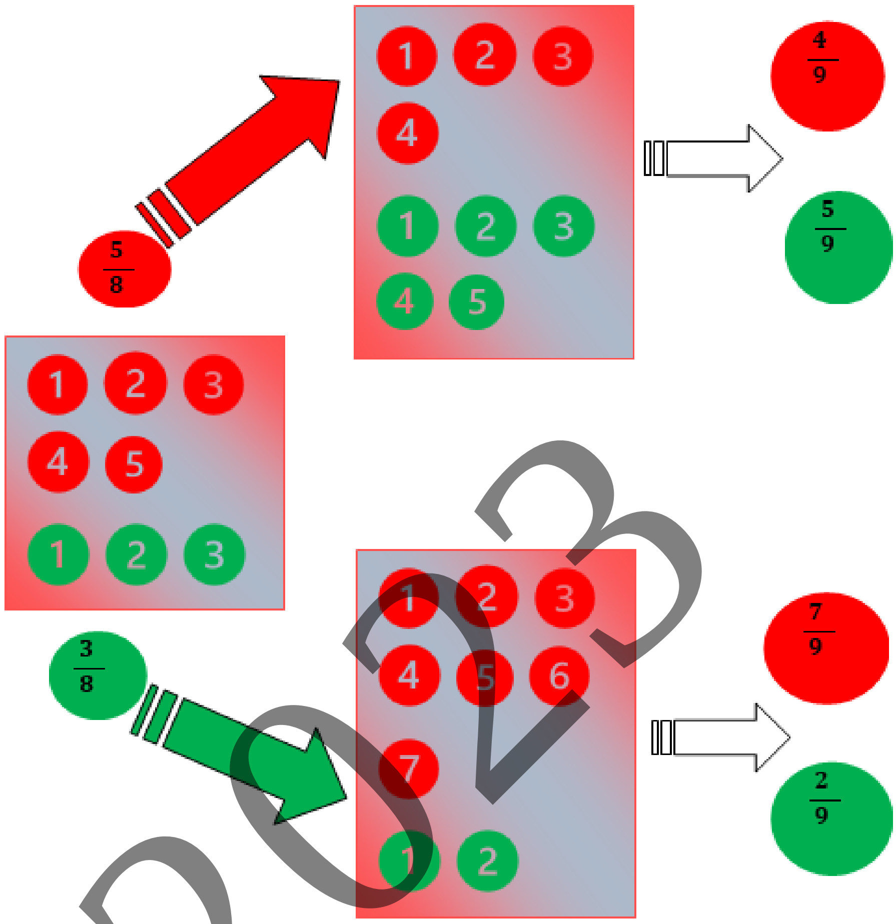
$$\begin{cases} P(SER\ TITULAR \mid GANAR) = P(SER\ TITULAR) \\ P(GANAR \mid SER\ TITULAR) = P(GANAR) \end{cases}$$

- $P(SER\ TITULAR \mid GANAR) = 0{,}7804$
- $P(SER\ TITULAR) = 0{,}8$

$\Rightarrow\ P(SER\ TITULAR \mid GANAR) \neq P(SER\ TITULAR)$

Por lo tanto, "SER TITULAR" y "GANAR" **no son sucesos independientes; son dependientes.**

B.3. *Ejercicio sobre cálculo de probabilidades. Probabilidad Total y a posteriori. Teorema de Bayes.*



a) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

$$P(segunda\ bola\ verde) = P(V_2) = P(R_1)\ P(V_2\,|\,R_1)\ +\ P(V_1)\ P(V_2\,|\,V_1) =$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9}\ +\ \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}\ = \frac{31}{72} = 0{,}43055 \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(segunda\ bola\ verde) =\ 0{,}43055\ \Rightarrow 43{,}055\,\%}$$

b) Probabilidad de que la primera bola haya sido roja, sabiendo que la segunda bola también ha sido roja.

$$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1\ \cap\ R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1)\ P(R_2|\,R_1)}{P(R_1)\,P(R_2|\,R_1)\ +\ P(V_1)\,P(R_2|\,V_1)} = \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{41}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(primera\ bola\ roja\ sabiendo\ que\ la\ segunda\ ha\ sido\ roja) =\ 0{,}4878}$$

$$\Rightarrow \mathbf{48{,}78}\,\%$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. *Cálculo del intervalo de confianza de la media para una población con distribución normal. Tamaño y error máximo admisible de la muestra.*

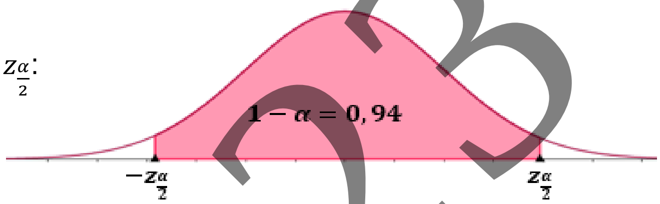
El peso neto de una tableta de chocolate: $X \equiv \mathcal{N}(\mu, 7)$

a) Calcula el intervalo de confianza para la media μ , con un nivel de confianza del 94 %.

- El valor de la media muestral es;

$$\bar{x} = \frac{5.274}{36} = 146{,}5 \quad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{146,5}$$

- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$:



Nivel de confianza: $n_c = 0{,}94 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}03 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$$

- El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(146{,}5 - 1{,}885\frac{7}{\sqrt{36}}, \quad 146{,}5 + 1{,}885\frac{7}{\sqrt{36}}\right) = (\mathbf{144,3}, \ \mathbf{148,69})$$

b) Calcular el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, de 3 gramos.

- El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (\bar{x}-e, \bar{x}+e) \Rightarrow \bar{x}+e-(\bar{x}-e) = 3 \Rightarrow 2e = 3 \Rightarrow$$

$$e = 1{,}5$$

Es decir, el error máximo admisible es la mitad de la amplitud del intervalo.

- Aplicando la fórmula del error para la media calculamos el tamaño de la muestra;

$$e = 1{,}5 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}885 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1{,}885\,\frac{7}{1{,}5} = 8{,}7967 \Rightarrow n = 77{,}38 \Rightarrow \boldsymbol{n} = \mathbf{78}$$

B.4. *Distribución binomial; media y desviación típica. Cálculo de probabilidades y aproximación de distribución normal para la distribución binomial. Corrección de Yates.*

- **El jugador A:** número de caras del jugador A: $X \equiv B\ (n, p)$
  - $n = número\ de\ lanzamientos\ con\ la\ moneda\ equilibrada$
  - $p = probabilidad\ de\ sacar\ cara\ = \frac{1}{2} = 0{,}5 \ \ \Rightarrow q = 0{,}5$
- **El jugador B:** número de cruces del jugador B: $Y \equiv B\ (n', p')$
  - $n' = número\ de\ lanzamientos\ con\ la\ moneda\ trucada$
  - $p' = probabilidad\ de\ sacar\ cruz\ = 0{,}6 \ \Rightarrow q' = 0{,}4$

a) Calculamos la probabilidad de que el jugador A obtenga 3 caras en 3 lanzamientos con su moneda equilibrada.

$X: número\ de\ caras\ del\ jugador\ A \ \equiv B\ (n,\ 0{,}5)$ y $n = 3 \Rightarrow \boldsymbol{X \equiv B\ (3,\ 0{,}5)}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\, p^k \cdot q^{n-k} \ \Rightarrow\ P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^0 = 0{,}125 \Rightarrow \%\ \mathbf{12{,}5}$$

OTRA FORMA

$$P(X = 3) = P(\,Cara \cap\ Cara \cap Cara) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$$

b) Calculamos la probabilidad de que el jugador B obtenga 2 cruces en 2 lanzamientos con su moneda trucada.

$Y : número\ de\ cruces\ del\ jugador\ B \ \equiv\ B\ (n', 0{,}6)$ y $n' = 2 \ \Rightarrow \boldsymbol{Y \equiv B\ (2,\ 0{,}6)}$

$$P(Y = k) = \binom{n'}{k} (p')^k \cdot (q')^{n'-k} \ \Rightarrow\ P(\,Y = 2) = \binom{2}{2} \cdot\ 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}36 \Rightarrow \%\ \mathbf{36}$$

OTRA FORMA

$$P(Y = 2) = P(Cruz \cap\ Cruz) = \ 0{,}6 \cdot 0{,}6 \ = 0{,}36$$

c) Calculamos la probabilidad de que el jugador A obtenga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada, y de que el jugador B obtenga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda cargada.

El jugador A:

- $X: número\ de\ caras\ del\ jugador\ A \equiv\ B\ (n, p) = B\ (\,400,\ 0{,}5)$

- Aproximación de la distribución normal para la distribución binomial:

$$X \equiv B\,(400,\ \ 0{,}5) \Rightarrow\ \ X' \sim N\big(n \cdot p,\ \ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\big) = N\left(400 \cdot 0{,}5,\ \ \sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 400 \cdot 0{,}5 = 200 > 5 \\ n \cdot q = 400 \cdot 0{,}5 = 200 > 5 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{X' \sim N(\,200, 10)}$$

Entonces:

$$P(X < 190) = \ P(X' < 190 - 0{,}5) = \ P(X' < 189{,}5) = P\left(\frac{X' - 200}{10} < \frac{189{,}5 - 200}{10}\right) =$$

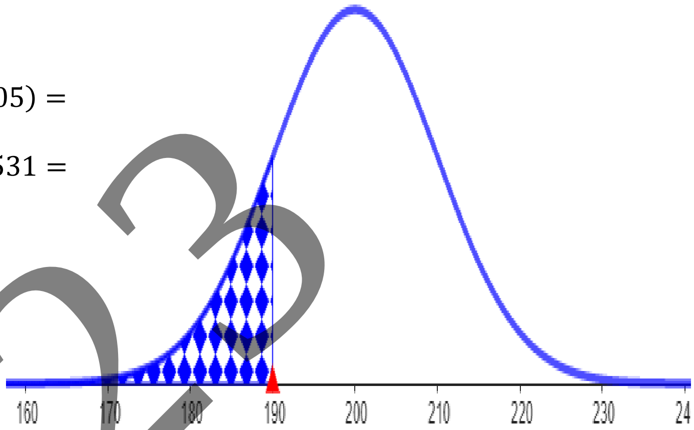
CORRECCIÓN DE YATES

$$= P(Z < -1{,}05)\ = \ P(Z > 1{,}05) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}05) = 1 - 0{,}8531 =$$

$$= \mathbf{0,1469} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(X < 190) = \%\,14,69}$$



El jugador B:

- Y: *número de cruces del jugador B* $\equiv B\,(n',\ p') = B\,(\,200\,,\ 0{,}6)$

- Aproximación de la distribución normal para la distribución binomial:

$$Y \equiv B(\,200,\ \ 0{,}6) \Rightarrow Y' \sim N\left(\,n' \cdot p',\ \ \sqrt{n' \cdot p' \cdot q'}\right) = N\big(200 \cdot 0{,}6,\ \ \sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}\big)$$

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 200 \cdot 0{,}6 = 120 > 5 \\ n \cdot q = 200 \cdot 0{,}4 = 80 > 5 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{Y' \sim\ N(120,\ 6,9282)}$$

Entonces:

$$P(Y < 110) = \ P(Y' < 110 - 0{,}5) = \ P(Y' < 109{,}5) = P\left(\ \frac{Y' - 120}{6{,}9282} < \frac{109{,}5 - 120}{6{,}9282}\right) =$$

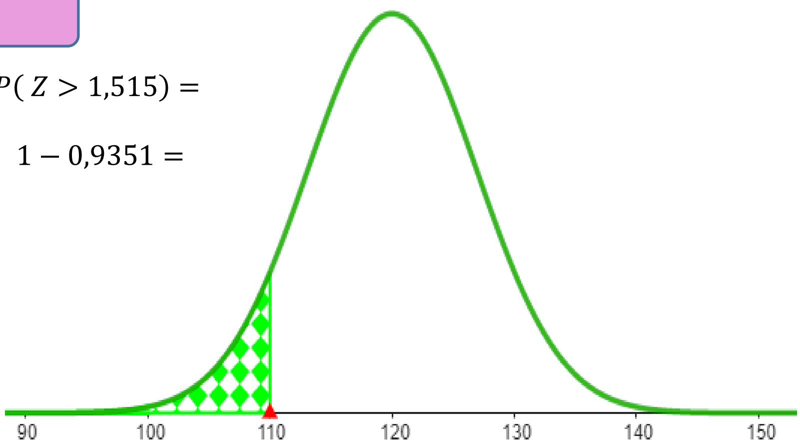
CORRECCIÓN DE YATES

$$= P(\,Z < -1{,}515) = \ \ P(\,Z > 1{,}515) =$$

$$= 1 - P(\,Z \leq 1{,}515) = \ 1 - 0{,}9351 =$$

$$= \mathbf{0,0649} \ \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(Y < 100) = \%\,6,49}$$



Por lo tanto, **es más probable que el jugador A** consiga menos de 190 caras en 400 lanzamientos con su moneda equilibrada, que el jugador B consiga menos de 110 cruces en 200 lanzamientos con su moneda trucada: ($\mathbf{0,1469 > 0,0649}$).

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi ariketaz osatuta dago.

2. ***Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.***

3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.

5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.

6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, …
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa –3,7 hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa 2,5 dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. 0,75 puntu

- **1. modua**
  - Alderantzizko matrizearen definizioa, **0,25 puntu.**
  - $B \cdot A$ matrizea kalkulatzea, **0,25 puntu.**
  - $A \cdot B$ matrizea kalkulatzea **0,25 puntu.**
- **2. modua**
  - A matrizearen determinantea, **0,15 puntu.**
  - Adjuntuak, **0,5 puntu.**
  - A matrizearen alderantzizkoa kalkulatzea, **0,1 puntu.**

b. 0,75 puntu

- $A - 2\,I_2$ matrizea kalkulatzea **0,25 puntu.**
- $(A - 2\,I_2)^2$ matrizea kalkulatzea **0,5 puntu.**

c. 1 puntu

- X matrizea zehaztatzeko adierazpena lortzea, **0,25 puntu.**
  - **1. modua**
    - B^2 matrizea kalkulatzea, **0,75 puntu.**
  - **2. modua**
    - A^{-1} matrizea kalkulatzea, **0,5 puntu.**
    - $A^{-1} \cdot B$ matrizea kalkulatzea, **0,25 puntu.**

B.1. ariketa ***(gehienez 2,5 puntu)***

a. **2,2 puntu**
- Helburu funtzioa zehaztea, **0,1 puntu.**
- Murrizketak zehaztea, **0,3 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea eta zehaztea,
    - Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu, beraz **0,3 puntu.**
    - Bideragarritasun-eskualdea zehaztea, **0,3 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea**, 0,2 puntu.**
- Erpinetan funtzioa baloratzea, **0,3 puntu.**
- Jimenaren baieztapenari erantzutea, ondo arrazoituz, **0,3 puntu.**
- Ivánen baieztapenari erantzutea ondo arrazoituz, **0,4 puntu.**

b. **0,3 puntu**
- Minimoaren balio zehaztea, **0,3 puntu.**

BLOKEA: ANALISIA

A.2. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. 0,4 puntu

- $f(x)$ funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,4 puntu.**

b. 0,3 puntu

- Erantzun arrazoitua, **0,3 puntu.**

c. 0,3 puntu

- Erantzun arrazoitua, **0,3 puntu.**

d. 0,5 puntu

- Erantzun arrazoitua, **0,5 puntu.**

e. 0,3 puntu

- Erantzun arrazoitua, **0,3 puntu.**

f. 0,7 puntu

- Erantzun arrazoitua, **0,3 puntu.**
- Funtzioaren ezaugarri batekin lotzea, **0,4 puntu.**

B.2. ariketa ***(gehienez 2,5 puntu)***

a. 1,2 puntu

- Jarraitutasuna $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$ tarteetan, **0,3 puntu.**
- Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,1 puntu.**
  - $x = 0$ puntuan.
    - Alboko limiteak kalkulatzea, **0,2 puntu.**
    - $f(0)$ balioa zehaztea, **0,1 puntu.**
    - a parametroaren balioa zehaztea, **0,1 puntu.**
  - $x = 2$ puntuan.
    - Alboko limiteak kalkulatzea, **0,2 puntu.**
    - $f(2)$ balioa zehaztea, **0,1 puntu.**
    - b parametroaren balioa zehaztea, **0,1 puntu.**

b. 0,5 puntu

- Funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,5 puntu.**

c. 0,8 puntu

- $\boldsymbol{A_1 + A_2}$ integral mugatuen zehaztapena, **0,2 puntu.**
- Integral mugatuak kalkulatzea**:**
  - $\boldsymbol{A_1}$ integral mugatua kalkulatzea, **0,3 puntu.**
  - $\boldsymbol{A_2}$ integral mugatua kalkulatzea, **0,3 puntu.**

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. **0,8 puntu**
- Zuhaitz diagrama edo kontingentzia taula egitea, **0,3 puntu**.
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

b. **0,6 puntu**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

c. **0,6 puntu**
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

d. **0,5 puntu**
- Adieraztea bi gertaera askeak izateak zer esan nahi duen, **0,1 puntu.**
- Kalkuluak, **0,2 puntu.**
- Ondorioztatzea nolakoak diren gertaerak, **0,2 puntu.**

B.3. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. **1,4 puntu**
- Zuhaitz diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,3 puntu.**
- Gertaeraren probabilitate osoa adieraztea edo bere formula, **0,4 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,7 puntu.**

b. **1,1 puntu**
- A posteriori probabilitatearen formula adieraztea, Bayes-en teorema, , **0,4 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,7 puntu.**

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. 1,7 puntu.

- Laginaren batezbestekoa zehaztea, **0,4 puntu.**
- Batezbestekorako konfiantza-tartearen formula zehaztea, **0,3 puntu.**
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ zehaztea, **0,5 puntu.**
- Eskatutako konfiantza-tartea, **0,5 puntu.**

b. 0,8 puntu.

- Errorearen zer den adieraztea, **0,2 puntu.**
- Errorearen formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Laginaren tamaina kalkulatzea, **0,4 puntu.**

B.4. ariketa *(gehienez 2,5 puntu)*

a. 0,6 puntu

- Banaketa zehaztea **0,2 puntu.**
- $P(X = 3)$ probabilitatea kalkulatzea, **0,4 puntu.**

b. 0,6 puntu

- Banaketa zehaztea **0,2 puntu.**
- $P(Y = 2)$ probabilitatea kalkulatzea, **0,4 puntu.**

c. 1,3 puntu

- **A jokalaria.**
  - Banaketa normalaren zuzenketa Yates hurbilketaren bidez **0,15 puntu.**
  - Eskatutako probabilitatearen kalkulua **0,5 puntu.**
- **B jokalaria.**
  - Banaketa normalaren zuzenketa Yates hurbilketaren bidez **0,15 puntu.**
  - Eskatutako probabilitatearen kalkulua **0,5 puntu.**

EBAZPENAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1.. *Kalkulu matriziala. Alderantzizko matrizearen kalkulua. Ekuazio matriziala.*

a) Egiaztatuko dugu $B=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$ matrizea $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa dela:

- $B=A^{-1} \Leftrightarrow B\cdot A=I_2 \quad \wedge \quad A\cdot B=I_2$
  - $B\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$
  - $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$

Beraz, $\boldsymbol{B=A^{-1}}$

BESTE MODU BAT

- $\boldsymbol{A^{-1}}$ kalkulatuko dugu:
  - $|A|=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1$
  - Adjuntuak:
    - $A_{11}=(-1)^2\cdot 2=2$
    - $A_{21}=(-1)^3\cdot 1=-1$
    - $A_{12}=(-1)^3\cdot 3=-3$
    - $A_{22}=(-1)^4\cdot 2=2$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=B \Longrightarrow \boldsymbol{B=A^{-1}}$$

b) $(A-2\,I_2)^2$ matrizea kalkulatuko dugu:

$$(A-2I)^2=\left[\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=3\,I_2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(A-2\,I_2)^2=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=3\,I_2}$$

c) X matrizea kalkulatuko dugu, non $A \cdot X = B$ den:

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = B \cdot B = B^2 \Rightarrow X = B^2$$

a) atala $A^{-1} = B$

$$X = B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

B.1 *Bi aldagaiko programazio linealeko problema ebaztea.*

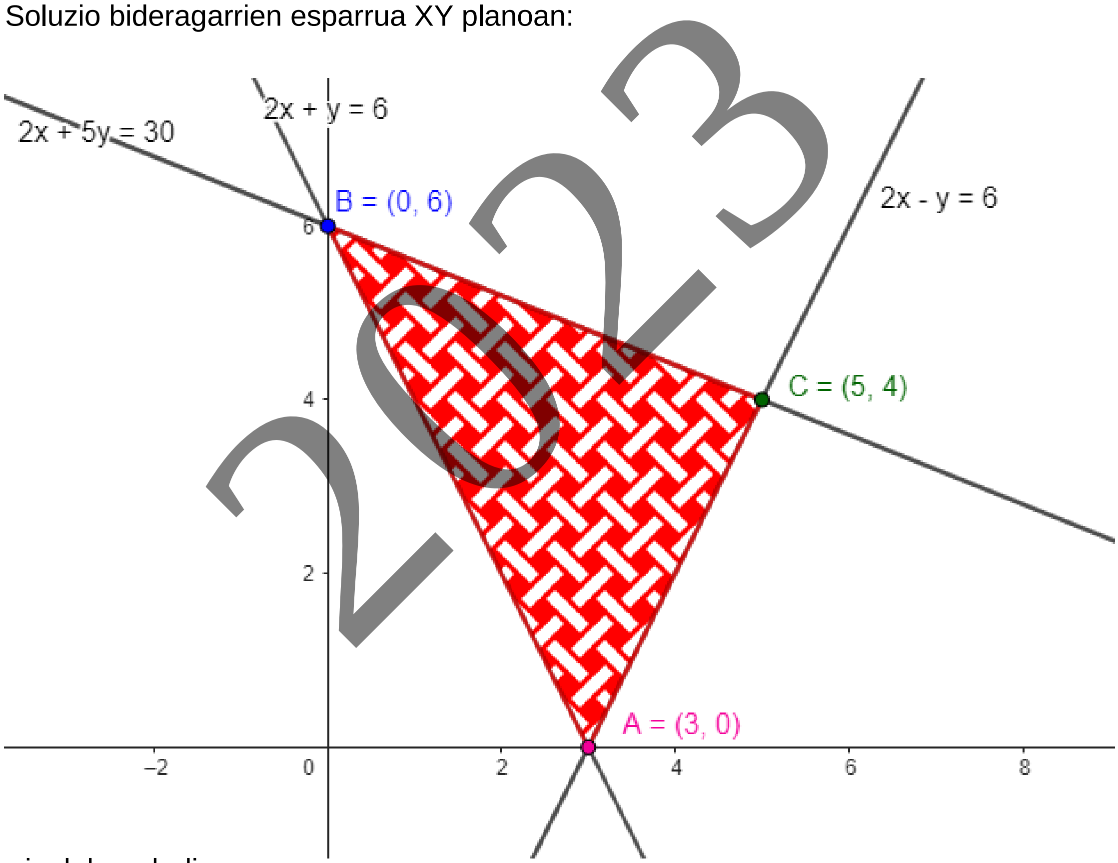
- Helburu funtzioa hau da:

  $F(x,\ y) = 6x + 3y - 2$

- Murrizketak honako hauek dira:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$$

- Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



- Erpinak hauek dira:

$$A(\,3,\quad 0\,);\quad B(\,0,\quad 6\,);\quad C(\,5,\quad 4\,)$$

- Erpin horietan helburu funtzioak $F(x,\ y) = 6x + 3y - 2$ hartzen dituen balioak kalkulatuko ditugu:

$$F(A) = F(3,\quad 0) =\ 16$$

$$F(B) = F(0,\quad 6) =\ 16$$

$$F(C) = F(5,\quad 4) =\ 40$$

a) Jimenak erantzun du $(1, 2)$ puntuan lortzen dela, eta Ivánek, berriz, $(3, 0)$ puntuan.

- Egia al da funtzioaren minimoa $(1, 2)$ puntuan lortzen dela?

  Ez. $(1, 2)$ puntua ez dago soluzio bideragarrien esparruan, ez duelako baldintzaren baten bat betetzen, beraz, ezinezkoa da funtzioak puntu horretan minimoa lortzea.

- Zehatza al da Ivánen erantzuna?

  Ez, minimoa $A\ (3, 0)$ puntuan ez ezik $\overline{AB}$ zuzenkiko puntu guztietan ere lortzen delako. Beraz, erantzuna, faltsua izan ez arren, ez da zehatza.

b) Zenbat balio du minimo horrek?

Minimoaren balioa 16 da.

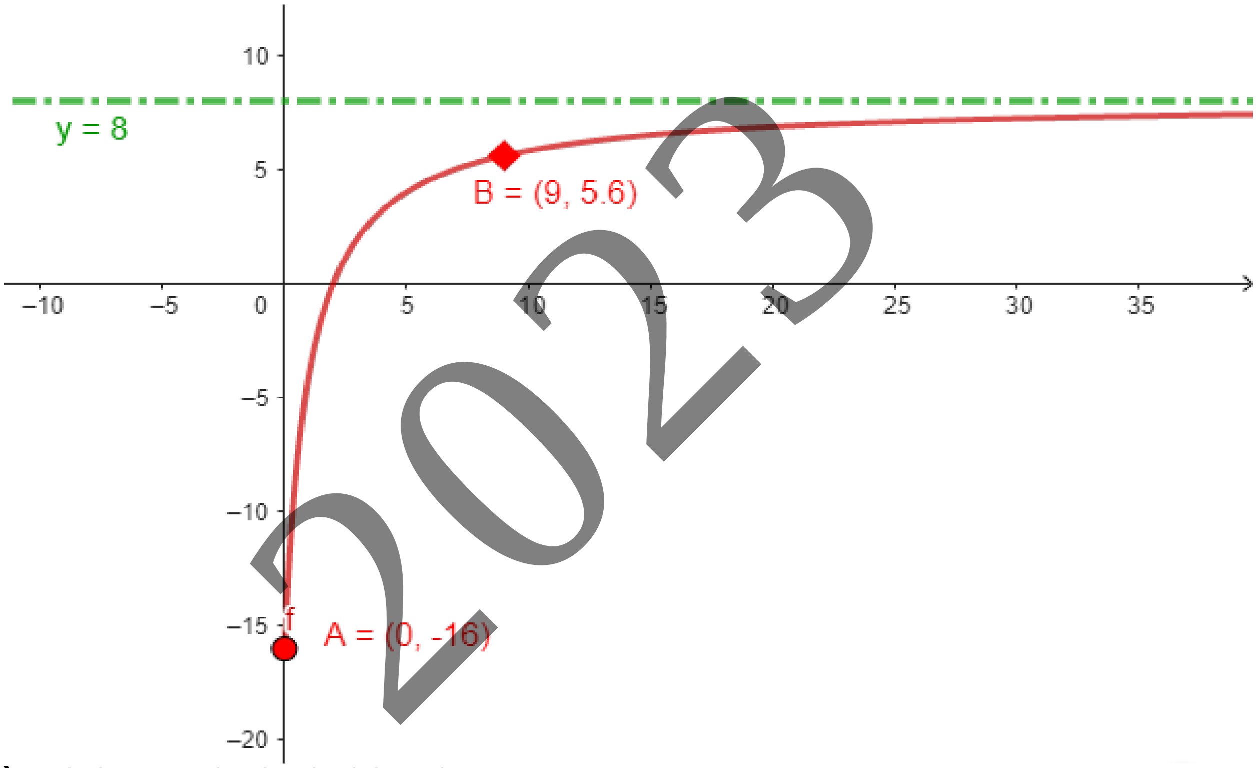
BLOKEA: ANALISIA

A.2 *Funtzio baten analisia. Funtzioaren maximo eta minimo erlatiboak kalkulatzea, eta adierazpen grafikoa. Funtzioaren ezaugarriak.*

$$I(t) = \frac{8t-16}{t+1}\,, \qquad t \geq 0$$

non t igarotako denbora (urtetan), eta $I(t)$ irabaziak/galerak (milako eurotan) diren.

a) Funtzioaren adierazpen grafikoa.



b) Zein izan zen hasierako inbertsioa?

Hasierako inbertsioa (hasierako kapitala) t = 0 denean $I(t)$-ri dagokion balioa da.

$\Longrightarrow \; I(0) = -16 \; \Longrightarrow$ hasierako inbertsioa **16.000 € izan zen**.

A puntuari dagokio grafikoan.

c) Zein urtetan irabazi du 5.600 €?

5.600 € I (t) = 5,6 balioari dagokio, mila eurokotan neurtzen delako.

$$I(t) = 5{,}6 = \frac{8t-16}{t+1} \quad \Rightarrow \quad 5{,}6\,t + 5{,}6 = 8\,t - 16 \quad \Rightarrow \quad 21{,}6 = 2{,}4\,t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = 9}$$

Beraz**, 9.urtean.**

B puntuari dagokio grafikoan.

d) Zein urtetatik aurrera hasten da enpresa irabaziak lortzen?

$$I(t)=\frac{8t-16}{t+1}\geq 0 \;\Rightarrow\; 8t-16\geq 0 \Rightarrow t\;\geq 2$$

Bigarren urtetik aurrera ($t\;\geq 2$).

BESTE MODU BAT

$$\begin{cases} I(t)=\dfrac{8t-16}{t+1} \\ I(t)=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{8t-16}{t+1}=0 \;\Rightarrow\; 8t-16=0 \;\Rightarrow \boldsymbol{t=2}$$

eta $I(t)$ gorakorra da (bere definizio- eremuan) $\Rightarrow$ enpresa bigarren urtetik aurrera hasi zen irabaziak lortzen.

e) Funtzioaren joera (funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak).

Joera beti da positiboa, funtzioa gorakorra delako bere definizio-eremuan: $[0,\infty)$.

f) Horrela jarraituz gero, zein da irabazien/galeren bilakaeraren joera?
Funtzioaren ezaugarriren batekin lotzen duzu?

Urteak igaro ahala, irabaziek/galerek izango duten bilakaeraren joera aztertzeko, $I(t)$ funtzioaren limitea kalkulatuko dugu, t ∞ –ra doanean. Hau da:

$$\lim_{n\to\infty} I(t)\;=\lim_{n\to\infty}\frac{8t-16}{t+1}=8$$

Beraz, **irabaziak/galerak 8.000 €-ko irabazien inguruan egonkortuko dira**.

$\boldsymbol{I(t)=8}$ **zuzena** funtzioaren **asintota horizontal bat da**; eta hori da urteak igaro ahala funtzioak duen joera.

B.2. *Funtzio baten jarraitasuna aztertzea. Adierazpen grafikoa.*

$$f(x)=\begin{cases} -2x-a & baldin\ eta \quad x\le 0 \quad bada \\ x-1 & baldin\ eta \quad 0<x<2 \quad bada \\ bx-5 & baldin\ eta \quad x\ge 2 \quad bada \end{cases}$$

a) *a* eta *b* parametroen balioak zehaztuko ditugu $f(x)$ funtzioa $\mathbb{R}$ -n jarraitua izan dadin.

- $\mathbb{R}-\{\mathbf{0},\mathbf{2}\}=(-\infty,\mathbf{0})\cup(\mathbf{0},\mathbf{2})\cup(\mathbf{2},\infty)$ tarteen puntu guztietan jarraitua da $f(x)$, funtzioaren definizioagatik, polinomioak baitira.
- $\boldsymbol{x=0}$ **puntuan.**

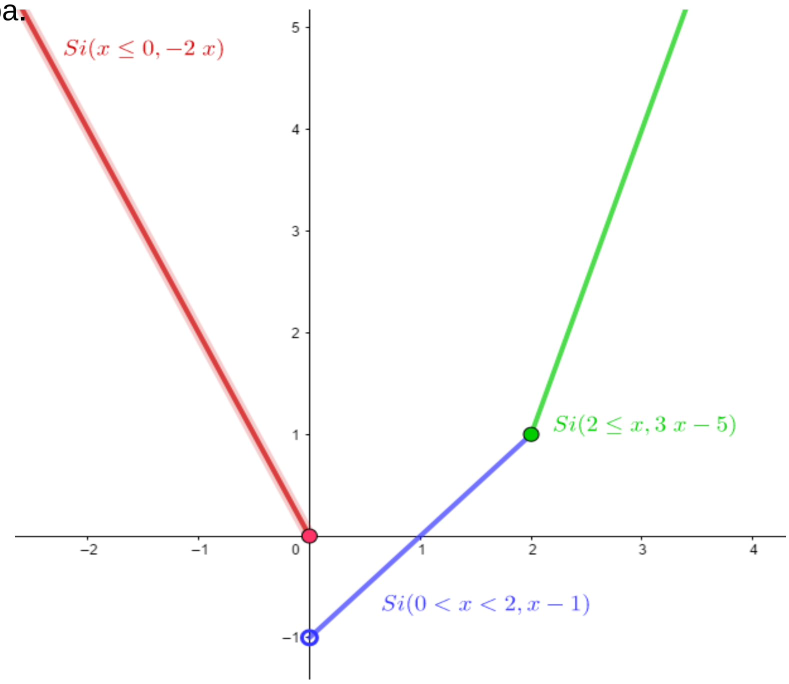
$$\boxed{f(x)\ jarraitua\ da\ \ x=x_0\ puntuan \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-2x-a)=-a$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$ $\quad\Rightarrow\ \boldsymbol{a=1}$
- $f(0)=-a$

- $\boldsymbol{x=2}$ **puntuan.**
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=1$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(bx-5)=2b-5$ $\quad\Rightarrow 2b-5=1\ \Rightarrow \boldsymbol{b=3}$
  - $f(2)=2b-5$

b) Funtzioaren adierazpen grafikoa.

$$f(x)=\begin{cases} -2x & x\le 0 \\ x-1 & 0<x<2 \\ 3x-5 & x\ge 2 \end{cases}$$



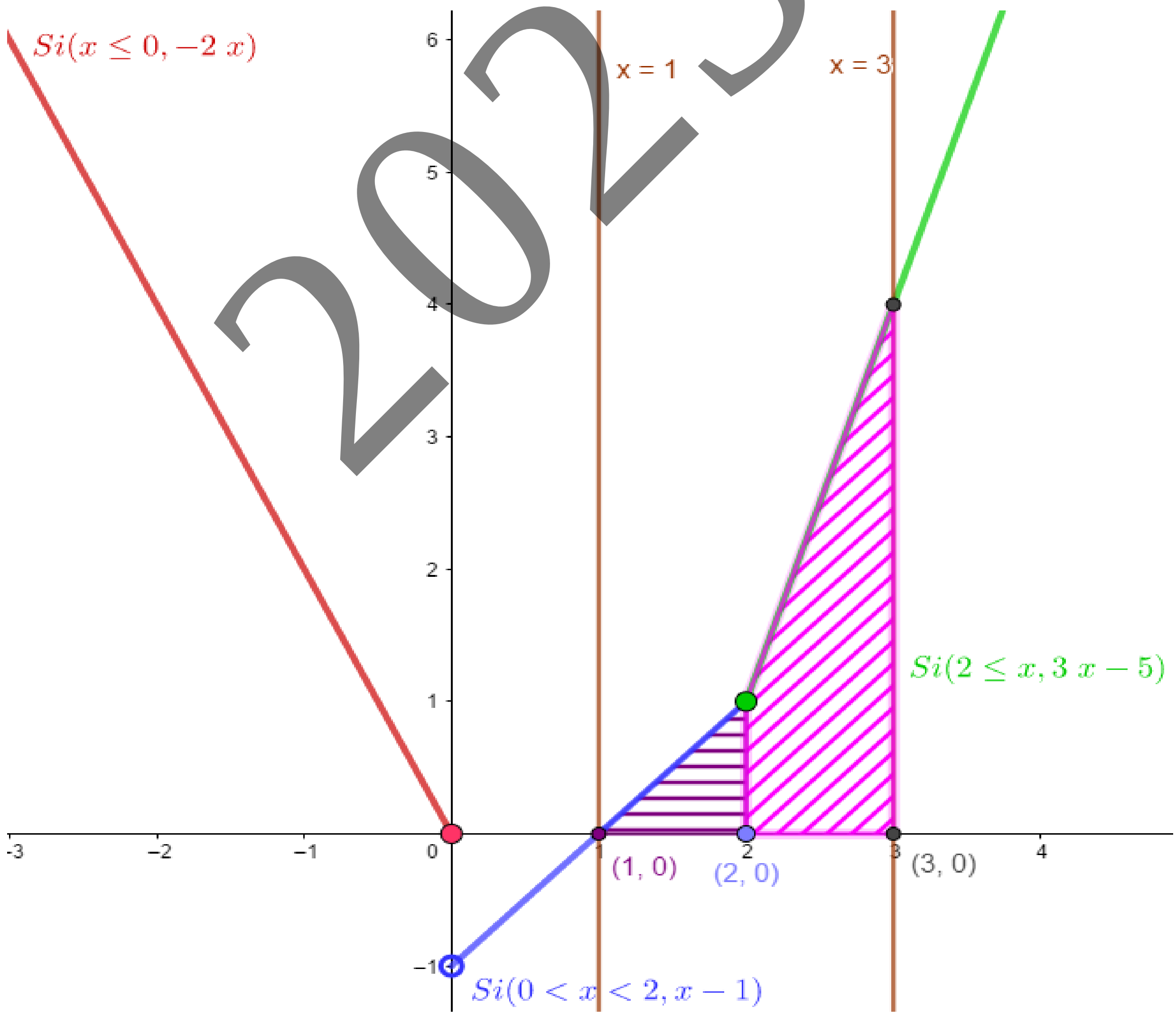
c) $a = 0$ eta $b = 3$ kasuan, funtzioaren grafikoak, *OX* abzisa-ardatzak eta $x = 1$ eta $x = 3$ zuzenek mugatutako eskualdearen azalera kalkulatuko dugu.

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 [(x-1)-0]\,dx \; + \int_2^3 [(3x-5)-0]\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x\right]_2^3 =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{3^3}{2} - 15\right) - \left(\frac{12}{2} - 10\right) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{27}{2} - 15 + 4 = 3u^2 \Rightarrow \; \boldsymbol{A = 3\,u^2}$$

Oharra: Emaitza hori bera ere lor zitekeen azalera geometrikoki kalkulatuz, irudiaren grafikotik abiatuta.

$$A = \left(\frac{1\cdot 1}{2}\right) + (1\cdot 1) + \left(\frac{1\cdot 3}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = \boldsymbol{3\,u^2}$$



BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3 *Probabilitate bat kalkulatzea*, *zuhaitz-diagramaren bidez edo probabilitate osoaren bidez.*

	IRABAZI	EZ IRABAZI	
TITULAR IZAN	0,32	0,48	**0,8**
TITULAR EZ IZAN	0,09	0,11	**0,2**
	0,41	**0,59**	**1**

a) Taldeak partidu bat irabazteko probabilitatea:

$$\boldsymbol{P(IRABAZI)} = 0{,}41 \implies \% \; \mathbf{41}$$

b) Taldeak irabazi duela jakinda, Gorka titular izanaren probabilitatea:

$$\boldsymbol{P(TITULAR\ IZAN \mid IRABAZI)} = \frac{0{,}32}{0{,}41} = 0{,}7804 \implies \% \; \mathbf{78{,}04}$$

c) Gorka titular ez jokatzeko eta taldeak irabazteko probabilitatea:

$$\boldsymbol{P(TITULAR\ EZ\ IZAN \ \cap\ IRABAZI)} = 0{,}09 \implies \% \; \mathbf{9}$$

d) “Titular izatea” eta “partida irabaztea” gertaerak askeak dira?

“*TITULAR IZAN*” eta “*IRABAZI*” askeak ⇔

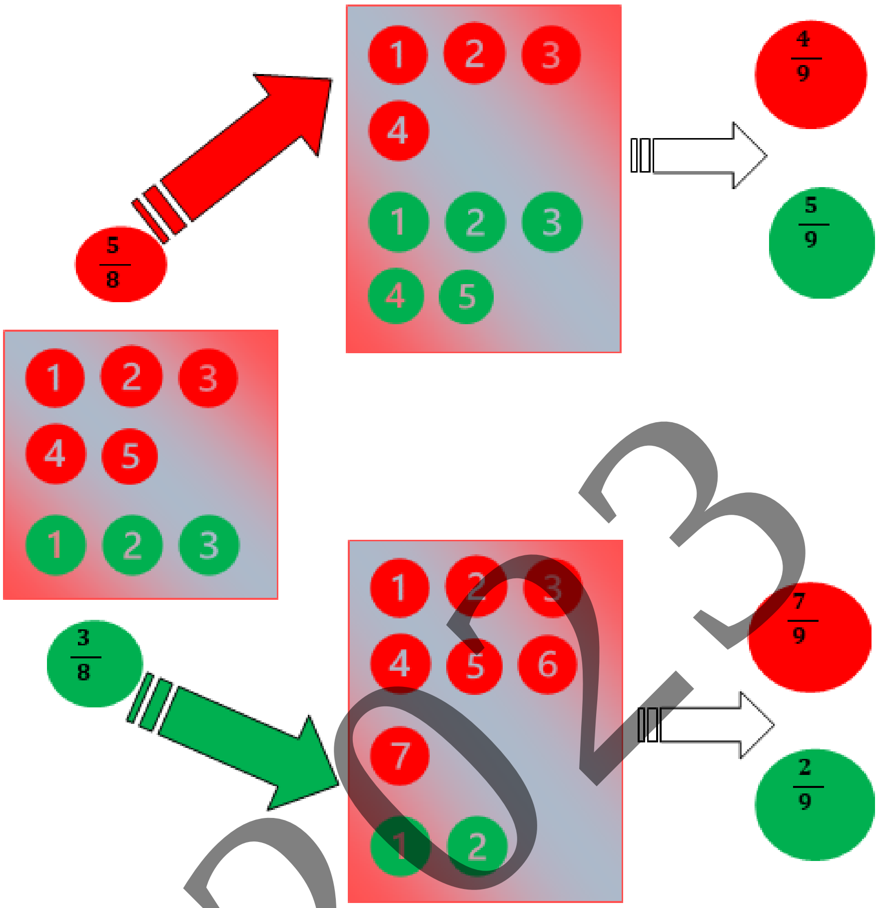
$$\begin{cases} P(TITULAR\ IZAN \mid IRABAZI) = P(TITULAR\ IZAN\ ) \\ P(IRABAZI \mid TITULAR\ IZAN) = P(IRABAZI) \end{cases}$$

- $P(TITULAR\ IZAN \mid IRABAZI) = 0{,}7804$
- $P(TITULAR\ IZAN\ ) = 0{,}8$

$\Rightarrow P(TITULAR\ IZAN \mid IRABAZI) \neq P(TITULAR\ IZAN)$

Beraz,“*TITULAR IZAN*” eta “*IRABAZI*” gertaerak ez dira askeak: **menpekoak dira**.

B.3. *Probabilitateen kalkuluei buruzko ariketa. Probabilitate osoa eta a posteriori. Bayesen teorema.*



a) Bigarren bola berdea izateko probabilitatea.

$$P(bigarren\ bola\ berdea) = P(B_2) = P(G_1)\cdot P(B_2|\,G_1) + P(B_1)\cdot P(B_2|\,B_1) =$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9} = \frac{31}{72} = 0{,}4305 \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(\ bigarren\ bola\ berdea\ ) = 0{,}43055 \Longrightarrow \%\ 43{,}055}$$

b) Lehenengo bola gorria izanaren probabilitatea, jakinda bigarren bola gorria izan dela.

$$P(G_1|G_2) = \frac{P(\ G_1 \cap\ G_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_1)\ \cdot\ P(G_2|\,G_1)}{P(G_1)\ \cdot P(G_2|\,G_1)\ +\ P(B_1)\ \cdot P(G_2|\,B_1)} = \frac{\frac{5}{8}\ \cdot\ \frac{4}{9}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\ \cdot\frac{7}{9}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{41}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(lehenengo\ bola\ gorria\ jakinda\ bigarrena\ gorria\ izan\ dela) = 0{,}4878}$$

$$\Longrightarrow \%\ \mathbf{48{,}78}$$

BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. *Banaketa normala duen populazio baten batezbestekorako konfiantza-tartearen kalkulatzea. Laginaren tamaina eta errore maximo onargarria.*

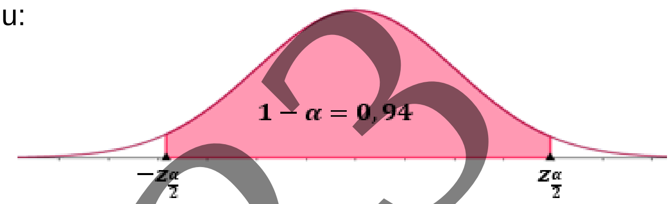
Marka jakin bateko txokolatezko tableten pisu garbia: $X \equiv \mathcal{N}\,(\mu\,, 7\,)$

a) Kalkulatuko dugu batezbestekorako konfiantza tartea, % 94ko konfiantza-mailaz:

Laginaren batezbestekoaren balioa hau da;

$$\bar{x} = \frac{5.274}{36} = 146{,}5 \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{\bar{x} = 146,5}$$

- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatuko dugu:



Konfiantza-maila: $n_c = 0{,}94 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}06 \;\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}03 \;\Rightarrow\; Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \;\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}97 \Rightarrow \; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$$

- Batezbestekorako konfiantza-tartea hau da :

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\;\; \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \;\left(146{,}5 - 1{,}885\,\frac{7}{\sqrt{36}}\;,\;\; 146{,}5 + 1{,}885\,\frac{7}{\sqrt{36}}\right) = \;(\mathbf{144,3,}\;\; \mathbf{148,69})$$

b) Konfiantza-maila beraz, laginaren tamaina kalkulatuko dugu lortzen den tartearen zabalera, gehienez, 3 gramo izan dadin.

- Batezbestekorako konfiantza-tartea hau da:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\;\; \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (\bar{x} - e, \bar{x} + e\;\;) \Rightarrow \;\bar{x} + e - (\bar{x} - e) = 3 \Rightarrow 2e = 3 \;\Rightarrow$$

$$e = 1{,}5$$

Hau da, errore maximo onargarria tartearen zabaleraren erdia da.

- Batezbestekorako errore maximo onargarriaren formulatik abiatuta, laginaren tamaina kalkulatuko dugu:

$$e = 1{,}5 \;= Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}885 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1{,}885\,\frac{7}{1{,}5} = 8{,}7967 \;\Rightarrow\; n = \;77{,}38 \;\;\Rightarrow\; \boldsymbol{n = \;78}$$

B.4. *Banaketa binomiala; batezbestekoa eta desbideratze tipikoa. Probabilitateen kalkulua eta banaketa normalaren hurbilketa banaketa binomialerako.Yates zuzenketa.*

- **A jokalaria:** A jokalariaren aurpegi kopurua: $X \equiv B\ (n, p)$
  - $n =$ *txanpon orekatuarekin jaurtiketa kopurua*
  - $p =$ *aurpegia ateratzeko probabilitatea* $= \frac{1}{2} = 0{,}5 \ \Rightarrow q = 0{,}5$
- **B jokalaria**: B jokalariaren gurutze kopurua: $Y \equiv B\ (n', p')$
  - $n' =$ *txanpon trukatuarekin jaurtiketa kopurua*
  - $p' =$ *gurutzea ateratzeko probabilitatea* $= 0{,}6 \ \Rightarrow q' = 0{,}4$

a) Kalkulatuko dugu zer probabilitate dagoen A jokalariak bere txanpon orekatuarekin 3 jaurtiketatan 3 aurpegi lortzeko.

X: *A jokalariaren aurpegi kopurua* $\equiv B\ (n,\ 0{,}5)$ eta $n = 3 \ \Rightarrow \boldsymbol{X \equiv B\ (3,\ 0,5)}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^0 = 0{,}125 \Rightarrow \%\ \mathbf{12,5}$$

BESTE MODU BAT

$$P(X = 3) = P(Aurpegia \cap Aurpegia \cap Aurpegia) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$$

b) Kalkulatuko dugu zer probabilitate dagoen B jokalariak bere txanpon trukatuarekin bi jaurtiketatan 2 gurutze lortzeko.

Y: *B jokalariaren gurutze kopurua* $\equiv B\ (n',\ 0{,}6)$ eta $n' = 2 \Rightarrow \boldsymbol{Y \equiv B\ (2,\ 0,6)}$

$$P(Y = k) = \binom{n'}{k} (p')^k \cdot (q')^{n'-k} \ \Rightarrow P(Y = 2) = \binom{2}{2} \cdot\ 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}36 \Rightarrow \%\ \mathbf{36}$$

BESTE MODU BAT

$$P(Y = 2) = P(Gurutze \cap Gurutze) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$$

c) Kalkulatuko ditugu A jokalariak 400 jaurtiketatan 190 aurpegi baino gutxiago lortzeko probabilitatea eta B jokalariak 200 jaurtiketatan 110 gurutze baino gutxiago lortzekoa.

A jokalaria:

- X: *A jokalariaren aurpegi kopurua* $\equiv \ B\ (n, p) = B\ (400,\ 0{,}5)$

- *Banaketa normalaren hurbilketa banaketa binomialerako*:

$$X \equiv B\,(400,\ 0{,}5) \Rightarrow X' \sim N\left(n \cdot p\,,\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right) = N\left(400 \cdot 0{,}5,\ \sqrt{400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 400 \cdot 0{,}5 = 200 > 5 \\ n \cdot q = 400 \cdot 0{,}5 = 200 > 5 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{X' \sim N(\,200,\ \ 10)}$$

Orduan:

$$\boldsymbol{P(X < 190)} = P(X' < 190 - 0{,}5) = P(X' < 189{,}5) = P\left(\frac{X' - 200}{10} < \frac{189{,}5 - 200}{10}\right) =$$

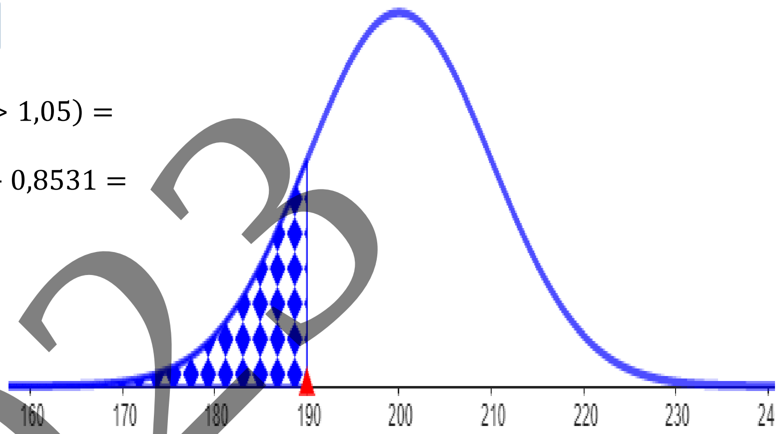
YATES ZUZENKETA

$$= P(Z < -1{,}05) = P(Z > 1{,}05) =$$

$$= 1 - P(Z \le 1{,}05) = 1 - 0{,}8531 =$$

$$= \mathbf{0{,}1469} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(X < 190) = \%\,14{,}69}$$



B jokalaria:

- Y: *B jokalariaren gurutze kopurua* $\equiv B\,(n',p') = B\,(200,\ 0{,}6)$

- *Banaketa normalaren hurbilketa banaketa binomialerako:*

$$Y \equiv B(200,\ 0{,}6) \Rightarrow Y' \sim N\left(n' \cdot p'\ ,\sqrt{n' \cdot p' \cdot q'}\right) = N\left(200 \cdot 0{,}6\ ,\ \sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 200 \cdot 0{,}6 = 120 > 5 \\ n \cdot q = 200 \cdot 0{,}4 = 80 > 5 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{Y' \sim N(120,\ \ 6{,}9282)}$$

Orduan:

$$\boldsymbol{P(Y < 110)} = P(Y' < 110 - 0{,}5) = P(Y' < 109{,}5) = P\left(\frac{Y' - 120}{6{,}9282} < \frac{109{,}5 - 120}{6{,}9282}\right) =$$

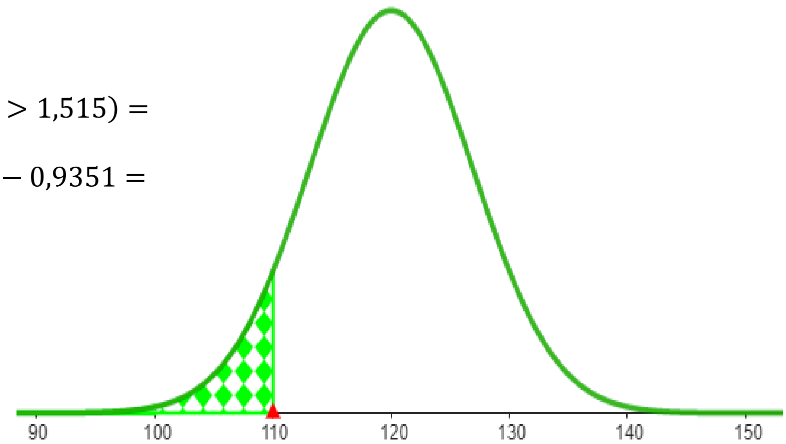
YATES ZUZENKETA

$$= P(Z < -1{,}515) = P(Z > 1{,}515) =$$

$$= 1 - P(Z \le 1{,}515) = 1 - 0{,}9351 =$$

$$= \mathbf{0{,}0649} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(Y < 100) = \%\,6{,}49}$$



Beraz, **A jokalariak** 400 jaurtiketatan bere txanpon orekatuarekin 190 aurpegi baino gutxiago lortzeko **probabilitate handiagoa** da B jokalariak 200 jaurtiketatan bere txanpon trukatuarekin 110 gurutze baino gutxiago lortzekoa baino: ($\mathbf{0,1469 > 0,0649}$).