Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II
Matemáticas II

EAU 2023 USE

www.ehu.eus

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

2023

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

2023

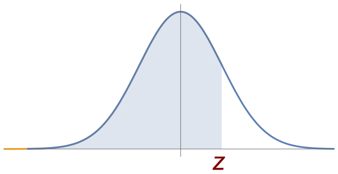
eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2023ko OHIKOA | *ORDINARIA 2023*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

2023

LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Eztabaidatu honako sistema honen soluzioaren existentzia α parametroaren arabera:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ x+\alpha y+z=1, \\ 2x+3y+4z=2. \end{cases}$$

Ebatzi sistema $\alpha=1$ eta $\alpha=2$ kasuetan.

B1 Ariketa

Kalkulatu A matrizearen heina, α parametroaren balioen arabera, baldin eta

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

bada.

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bedi r honako ekuazio kartesiar hauek dituen zuzena:

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x+2y+z=2. \end{cases}$$

a) Kalkulatu r zuzenaren ekuazio parametrikoak.

b) Kalkulatu r zuzena perpendikularki ebakitzen duen eta r-ren kanpoko puntua den $P(2,1,0)$ puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazio parametrikoak.

2023

B2 Ariketa

Izan bitez r honako ekuazio jarraitu hau duen zuzena: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ eta $\pi_2 \equiv x+y-z=1$ ekuazioetako planoak, P_1 puntua r zuzenaren eta π_1 planoaren arteko ebaki-puntua eta P_2 puntua r zuzenaren eta π_2 planoaren arteko ebaki-puntua. Kalkulatu

a) P_1 eta P_2 puntuen koordenatuak;

b) P_1 eta P_2 puntuen arteko distantzia;

c) P_1 puntutik π_2 planorako distantzia.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x)=x^4-2x^3+x^2$ funtzioa. Kalkulatu haren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, eta aurkitu haren maximo eta minimo erlatiboak. Kalkulatu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x=2$ abszisa duen puntuan.

B3 Ariketa

$f(x)=Ax^2+Bx+C$ funtzioa gorakorra da $(-\infty,1)$ tartean eta beherakorra $(1,+\infty)$ tartean. Gainera, f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea $x=2$ abszisa duen puntuan $y=x+2$ ekuazioko zuzenarekiko perpendikularra da eta $f(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ da. Kalkulatu A, B eta C parametroen balioak.

2023

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Marraztu behetik $y = \dfrac{x^2}{4}$ ekuazioko kurbak eta gainetik $y = \dfrac{4}{x^2}$ eta $y = 4$ ekuazioetako kurbek lehen koadrantean mugatzen duten eremua. Kalkulatu eremu horren azalera.

B4 Ariketa

Kalkulatu integral hauek:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx, \qquad \int (x+2)\sin(3x)\,dx.$$

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Enpresa baten ekoizpena lau txanda berdinetan egiten da; txanda horietako hiru egunez egiten dira eta bat gauez. Eguneko txanda bakoitzean ekoitzitako pieza akastunen ehunekoa % 2 da, eta gauekoan, % 10. Ausazko txanda batetik pieza bat ausaz hartzen bada,

a) kalkulatu pieza akastuna izateko probabilitatea;

b) hartutako pieza hori akastuna bada, kalkulatu eguneko txanda batean ekoitzita izateko probabilitatea.

B5 Ariketa

Matematikako proba batean lortutako emaitzek 65 puntuko batezbestekoa eta 18 puntuko desbideratze tipikoa dituen banaketa normal bati jarraitzen diote. Ikasleen % 15 maila aurreratuan dago, % 65 maila ertainean eta gainerako % 20a hasierako mailan. Erabaki, zure erantzunak arrazoituz, zein mailatan kokatuko ditugun honako nota hauek lortu dituzten ikasleak:

a) 85,5 puntu,

b) 48 puntu.

2023

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1, \\ 2x + 3y + 4z = 2. \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro α, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto $P(2, 1, 0)$, que es exterior a r.

2023

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ y $\pi_2 \equiv x+y-z=1$, P_1 el punto de corte de la recta r con el plano π_1 y P_2 el punto de corte de la recta r con el plano π_2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P_1 y P_2;

b) la distancia entre los puntos P_1 y P_2;

c) la distancia del punto P_1 al plano π_2.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función $f(x)=x^4-2x^3+x^2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

Ejercicio B3

La función $f(x)=Ax^2+Bx+C$ es creciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y decreciente en el intervalo $(1,\infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y=x+2$ y $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Calcula los valores de los parámetros A, B y C.

2023

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{4}{x^2}$ e $y = 4$. Calcula el área de ese recinto.

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx, \qquad \int (x+2)\sin(3x)\,dx.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %.

Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

2023

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

2023

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A1.

- Matrizearen determinantea kalkulatzea eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = 1$ kasua eztabaidatzea eta ebaztea (0,75 puntu).
- $\alpha = 2$ kasua ebaztea (0,75 puntu).

B1.

- α parametroaren balioen kalkulua, zeinetarako 3×3 ordenako azpimatrize baten determinantea nulua den (1 puntu).
- Kasu posible guztien analisia (1,5 puntu).

A2.

- Zuzenaren ekuazio parametrikoak zuzen kalkulatzea (1 puntu).
- P puntutik igaro eta r zuzenarekiko perpendikularra den planoaren ekuazioa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- r zuzenaren eta r zuzenarekiko perpendikularra den planoaren arteko ebaki-puntua kalkulatzea (0,5 puntu).
- Eskatutako zuzenaren ekuazioa kalkulatzea (0,5 puntu).

B2.

- a) atala zuzen ebaztea (1,5 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- c) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).

A3.

- f-ren deribatua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- f-ren deribatua faktorizatzea eta gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak kalkulatzea (1 puntu).
- f-ren mutur erlatiboak kalkulatzea (0,5 puntu).
- Eskatutako zuzen ukitzailea kalkulatzea (0,5 puntu).

B3.

- A eta B parametroek bete behar dituzten baldintzak zuzen planteatzea (1 puntu).
- A eta B parametroak zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- C parametroak bete behar duen baldintza zuzen planteatzea (0,5 puntu).
- C parametroa zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).

2023

A4.

- Eremua ondo marraztea, eta grafikoen ebaki-puntuak kalkulatzea. (1,25 puntu).
- Eremuaren azalera zuzen kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).

B4.

- Lehen integralaren integrakizuna zuzen deskonposatzea (1 puntu).
- Lehen integrala zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- Bigarren integrala zuzen kalkulatzea (1 puntu).

A5.

- Ariketaren planteamendu zuzena (0,5 puntu).
- a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).

B5.

- Ariketaren planteamendu zuzena (1,5 puntu).
- a) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- b) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).

2023

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2,5 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.
7. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

2023

Criterios particulares de cada uno de los problemas

A1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos en los que no se anula el determinante (1 punto).
- Discusión y resolución para el caso de $\alpha = 1$ (0,75 puntos).
- Resolución para el caso $\alpha = 2$ (0,75 puntos).

B1.

- Cálculo de los valores del parámetro α que anulan el determinante de una submatriz de orden 3×3. (1 punto).
- Análisis de todos los casos posibles (1,5 puntos).

A2.

- Cálculo correcto de las ecuaciones paramétricas de la recta (1 punto).
- Cálculo del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto P (0,5 puntos).
- Cálculo del punto de intersección de la recta r con el plano perpendicular a la misma (0,5 puntos).
- Cálculo de la ecuación de la recta pedida (0,5 puntos).

B2.

- Resolución correcta del apartado a) (1,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado b) (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado c) (0,5 puntos).

A3.

- Cálculo correcto de la derivada de f (0,5 puntos).
- Factorización de la derivada de f y cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (1 punto).
- Cálculo de los extremos relativos de f (0,5 puntos).
- Cálculo de la recta tangente pedida (0,5 puntos).

B3.

- Planteamiento de la condiciones que deben cumplir los parámetros A y B (1 punto).
- Cálculo correcto de los parámetros A y B (0,5 puntos).
- Planteamiento de la condición que debe cumplir el parámetro C (0,5 puntos).
- Cálculo correcto del parámetro C (0,5 puntos).

2023

A4.

- Dibujo adecuado del recinto y cálculo de los puntos de corte de las gráficas (1,25 puntos).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1,25 puntos).

B4.

- Descomposición correcta del integrando de la primera integral (1 punto).
- Cálculo correcto de la primera integral (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la segunda integral (1 punto).

A5.

- Planteamiento correcto del ejercicio (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado a) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado b) (1 punto).

B5.

- Planteamiento correcto del ejercicio (1,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado a) (0,5 puntos).
- Resolución correcta del apartado b) (0,5 puntos).

2023

ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Koefizienteen matrizearen determinantea $2-2\alpha$ da. Orduan, $\alpha \neq 1$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$\alpha = 1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta baita ere matrize zabalduarena; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da. Sistemaren soluzioa $(1+z, -2z, z)$ da, $z \in \mathbb{R}$ edozein izanik.

$\alpha = 2$ bada, sistemaren soluzioa $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ da.

B1 EBAZPENA

Lehen hiru zutabeek osatzen duten azpimatrizearen determinantea $\alpha(3-\alpha)$ da; beraz, $\alpha \neq 0$ eta $\alpha \neq 3$ bada, A-ren heina 3 da.

$\alpha = 0$ bada, A-ren lehen errenkada 0-z osatuta dago; beraz, 3×3 ordenako edozein azpimatrizeren determinantea nulua da, eta A-ren heina 3 baino txikiagoa da. Gainera, erraz aurki daiteke nulua ez den 2×2 ordenako determinantea duen azpimatrize bat. Ondorioz, A-ren heina 2 da.

$\alpha = 3$ bada, lehen, bigarren eta laugarren zutabeek osatzen duten azpimatrizearen determinantea 9 da; beraz, A-ren heina 3 da.

Has daiteke ere azken hiru zutabeek osatzen duten azpimatrizearen determinantea kalkulatuz. Determinante hori $-\alpha^2$ denez, $\alpha \neq 0$ bada, A matrizearen heina 3 da. Soilik falta da $\alpha = 0$ kasua aztertzea, goian egin den bezala.

A2 EBAZPENA

Zuzenaren norabide-bektorea zuzena definitzen duten bi planoen bektore normalen biderkadura bektoriala da, $(1,1,-1) \times (2,2,1) = (3,-3,0)$ edo, horren edozein multiplo, adibidez $(1,-1,0)$. r zuzenaren puntu bat $(0,1,0)$ da; beraz, zuzenaren ekuazio parametrikoak hauek dira:

$$\{x = t,\ y = 1-t,\ z = 0\}.$$

2023

$P(2,1,0)$ puntutik pasatzen den eta r perpendikularki ebakitzen duen zuzena kalkulatzeko, lehenik P puntua barne duen r zuzenaren plano perpendikularra kalkulatu behar da. Plano horren ekuazioa $x-y-1=0$ da. $x-y-1=0$ ekuazioko planoaren eta r zuzenaren arteko ebaki-puntua $Q(1,0,0)$ da. Ondoren, bilatzen den zuzenaren norabide-bektorea $\overrightarrow{QP}=(1,1,0)$ da, eta zuzena $P(2,1,0)$ puntutik igarotzen dela jakinik, eskatutako zuzenaren ekuazio parametrikoak hauek dira:

$$\{x=2+t,\ y=1+t,\ z=0\}.$$

B2 EBAZPENA

Zuzenaren edozein puntu $(1+t,1-t,1+2t)$ motakoa da, $t\in\mathbb{R}$ izanik.

a) P_1 puntuaren koordenatuak lortzeko, $(1+t,1-t,1+2t)$ puntua π_1 planoaren ekuazioan ordezkatuta $t=-1$ lortuko dugu. Beraz, $P_1(0,2,-1)$ puntua ateratzen da. Era berean jokatzen dugu P_2 puntuaren koordenatuak kalkulatzeko, hau da, $(1+t,1-t,1+2t)$ puntua π_2 planoaren ekuazioan ordezkatzen da, $t=0$ lortzen da, eta, ondorioz, $P_2(1,1,1)$ da.

b) P_1 eta P_2 puntuen arteko distantzia $\overrightarrow{P_1P_2}$ bektorearen modulua da:

$$\text{d}(P_1,P_2)=\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{6}.$$

c) P_1 puntuaren eta π_2 planoaren arteko distantzia honako hau da:

$$\text{d}(P_1,\pi_2)=\frac{|0+2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2023

A3 EBAZPENA

f-ren deribatua $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ da; beraz, f beherakorra da $(-\infty, 0)$ eta $(1/2, 1)$ tarteetan eta gorakorra da $(0, 1/2)$ eta $(1, +\infty)$ tarteetan.

f-k minimo erlatiboak ditu $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan, $f(0) = 0$ eta $f(1) = 0$ izanik, eta maximo erlatibo bat $x = 1/2$-n, $f(1/2) = 1/16$ izanik.

f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea $x = 2$ abszisa duen puntuan $y = 12x - 20$ da.

B3 EBAZPENA

f gorakorra denez $(-\infty, 1)$ tartean eta beherakorra $(1, +\infty)$ tartean, f-k maximo bat du $x = 1$ puntuan, hau da, $f'(1) = 2A + B = 0$ da.

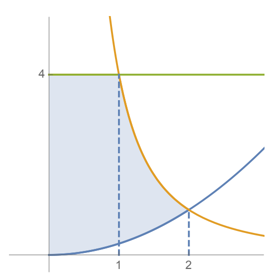
f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea $x = 2$ abszisa duen puntuan $y = x + 2$ ekuazioko zuzenarekiko perpendikularra denez, $f'(2) = 4A + B = -1$ da. Lortutako bi ekuazioek osatzen duten sistema ebatziz, $A = -1/2$ eta $B = 1$ dira.

Azkenik, $C = f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ da.

2023

A4 EBAZPENA

$y = x^2/4$ eta $y = 4/x^2$ ekuazioetako kurbek elkar ebakitzen dute $x^4 = 16$ bada, hau da, lehen koadranteko puntuak nahi direnez, $x = 2$ denean. Gainera, $y = 4$ ekuazioko zuzenak $y = 4/x^2$ kurba ebakitzen du $x = 1$ denean. Beraz, eskatutako eremua irudian agertzen dena da:



Eremu horren azalera honako hau da:

$$A = \int_0^1 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3}\text{u}^2.$$

B4 EBAZPENA

Lehen integrala kalkulatzeko, integrakizuna honela deskonposatuko dugu:

$$\frac{x^2+4}{(x+2)^2} = 1 - \frac{4}{x+2} + \frac{8}{(x+2)^2}.$$

Orduan,

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx = x - 4\ln|x+2| - \frac{8}{x+2} + k.$$

Bigarren integrala zatika integratuz ebazten da, $u = x+2$ eta $dv = \sin(3x)dx$ hartuz. Orduan, $du = dx$ eta $v = -\dfrac{\cos(3x)}{3}$ dira. Beraz,

$$\int (x+2)\sin(3x)\,dx = -\frac{(x+2)\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + k.$$

A5 EBAZPENA

Probabilitate-kalkuluko ariketa, zuhaitz-diagramaren bidez eta probabilitate baldintzatuaren bidez ebazten dena.

a) $$\begin{aligned} P(\text{akastuna}) &= P(\text{egunez})P(\text{akastuna | egunez}) \\ &\quad + P(\text{gauez})P(\text{akastuna | gauez}) \\ &= \frac{3}{4}\times 0,02 + \frac{1}{4}\times 0,1 = 0,04. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\text{egunez | akastuna}) &= \frac{P(\text{egunez})P(\text{akastuna | egunez})}{P(\text{akastuna})} = \frac{\frac{3}{4}\times 0,02}{0,04} \\ &= 0,375. \end{aligned}$$

2023

B5 EBAZPENA

Banaketa normalaren problema bat da, probabilitateak ezagutzen ditugu eta probabilitate horiek ematen dituzten tarteak mugatzen dituzten muturren balioak kalkulatu behar ditugu. Izan bedi X $N(65, 18)$ banaketari jarraitzen dion aldagaia. Aurkitu behar dira x_1, hasierako mailan egoteko nota maximoa, eta x_2, maila aurreratuan egoteko nota minimoa, zeinetarako $P(X \leq x_1) = 0,2$ eta $P(X \geq x_2) = 0,15$ diren.

Problema, $N(0,1)$ banaketa normalari jarraitzen dion Z aldagairako ebatziko dugu, eta, ondoren, lortu ditugun balioak "destipifikatuko" ditugu, gogoratuz $P(X \leq x) = P\Big(Z \leq \dfrac{x-65}{18}\Big) = P(Z \leq z)$ dela; beraz, $x = 65 + 18z$ da.

Orduan,

$$
\begin{aligned}
P(Z \leq z_1) = 0,2 \Longrightarrow\ & P(Z \leq -z_1) = 0,8 \Longrightarrow -z_1 = 0,84 \\
& \Longrightarrow x_1 = 65 + 18 \times (-0,84) = 49,88; \\
P(z \geq z_2) = 0,15 \Longrightarrow\ & P(z \leq z_2) = 0,85 \Longrightarrow z_2 = 1,04 \\
& \Longrightarrow x_2 = 65 + 18 \times 1,04 = 83,72.
\end{aligned}
$$

Beraz,

a) 85,5 puntu atera dituen ikaslea maila aurreratuan dago.

b) 48 puntu atera dituen ikaslea hasierako mailan dago.

2023

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $2-2\alpha$. Por tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada también; por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO. La solución del sistema es $(1+z, -2z, z)$, siendo $z \in \mathbb{R}$ cualquiera.

Si $\alpha = 2$, la solución del sistema es $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

SOLUCIÓN B1

El determinante de la submatriz formada por las tres primeras columnas es $\alpha(3-\alpha)$; por tanto, si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 3$, el rango de A es 3.

Si $\alpha = 0$, la primera fila de A está formada por 0's; por tanto, el determinante de cualquier submatriz de orden 3×3 es nulo, y el rango de A es menor que 3. Además, es fácil encontrar una submatriz de orden 2×2 cuyo determinante es no nulo. En consecuencia, A tiene rango 2.

Si $\alpha = 3$, el determinante de la submatriz formada por la primera, segunda y cuarta columnas es 9, por tanto, el rango de A es 3.

También se puede comenzar calculando el determinante de la submatriz formada por las tres últimas columnas. Ese determinante es $-\alpha^2$, por lo que si $\alpha \neq 0$, el rango de A es 3. Únicamente falta estudiar el caso $\alpha = 0$, como ya se ha explicado.

SOLUCIÓN A2

El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales a los planos que definen la recta, $(1, 1, -1) \times (2, 2, 1) = (3, -3, 0)$, o cualquier múltiplo de éste, por ejemplo, $(1, -1, 0)$. Un punto de la recta r es el $(0, 1, 0)$; por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\{x = t,\ y = 1 - t,\ z = 0\}.$$

2023

Para calcular la recta que pasa por el punto $P(2,1,0)$ y corta perpendicularmente a r, en primer lugar debemos calcular el plano perpendicular a r que contiene a P. La ecuación de ese plano es $x-y-1=0$. El punto de corte del plano de ecuación $x-y-1=0$ y la recta r es $Q(1,0,0)$. Ahora, el vector director de la recta buscada es $\overrightarrow{QP}=(1,1,0)$, y como la recta pasa por el punto $P(2,1,0)$, las ecuaciones paramétricas de la recta que se pide son:

$$\{x=2+t,\ y=1+t,\ z=0\}.$$

SOLUCIÓN B2

Un punto cualquiera de la recta es de la forma $(1+t,1-t,1+2t)$, siendo $t\in\mathbb{R}$.

a) Para calcular las coordenadas del punto P_1 sustituimos en la ecuación del plano π_1 el punto $(1+t,1-t,1+2t)$, y nos da $t=-1$. Por tanto, se obtiene el punto $P_1(0,2,-1)$. Se procede de manera análoga para encontrar las coordenadas del punto P_2, es decir, se sustituye el punto $(1+t,1-t,1+2t)$ en la ecuación del plano π_2 y se obtiene $t=0$, luego $P_2(1,1,1)$.

b) La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es el módulo del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\mathrm{d}(P_1,P_2)=\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{6}.$$

c) La distancia del punto P_1 al plano π_2 es

$$\mathrm{d}(P_1,\pi_2)=\frac{|0+2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2023

SOLUCIÓN A3

La derivada de f es $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$; por lo tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y en $(1/2, 1)$ y es creciente en los intervalos $(0, 1/2)$ y $(1, +\infty)$.

f tiene mínimos relativos en $x = 0$ y $x = 1$, siendo $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$; y un máximo relativo en $x = 1/2$, con $f(1/2) = 1/16$..

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 12x - 20$.

SOLUCIÓN B3

Como f es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$, f tiene un máximo en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 2A + B = 0$.

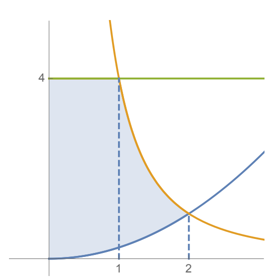
Como la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$, debe ser $f'(2) = 4A + B = -1$. Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, $A = -1/2$ y $B = 1$.

Finalmente, $C = f(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2023

SOLUCIÓN A4

Las curvas $y = x^2/4$ e $y = 4/x^2$ se cortan cuando $x^4 = 16$, es decir, en el primer cuadrante, cuando $x = 2$. Además, la recta $y = 4$ corta a la curva $y = 4/x^2$ cuando $x = 1$. Por tanto, el recinto es el de la imagen:



El área de ese recinto es:

$$A = \int_0^1 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3}\text{u}^2.$$

SOLUCIÓN B4

Para calcular la primera integral, descomponemos el integrando como sigue:

$$\frac{x^2+4}{(x+2)^2} = 1 - \frac{4}{x+2} + \frac{8}{(x+2)^2}.$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx = x - 4\ln|x+2| - \frac{8}{x+2} + k.$$

La segunda integral se resuelve por partes, tomando $u = x+2$ y $dv = \sin(3x)dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = -\frac{\cos(3x)}{3}$. Por tanto,

$$\int (x+2)\sin(3x)\,dx = -\frac{(x+2)\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + k.$$

SOLUCIÓN A5

Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

a) $P(\text{defectuoso}) = P(\text{diurno})P(\text{defectuoso | diurno})$
$\quad + P(\text{nocturno})P(\text{defectuoso | nocturno})$
$\quad = \frac{3}{4} \times 0,02 + \frac{1}{4} \times 0,1 = 0,04.$

b) $P(\text{diurno | defectuoso}) = \frac{P(\text{diurno})P(\text{defectuoso | diurno})}{P(\text{defectuoso})}$
$\quad = \frac{\frac{3}{4} \times 0,02}{0,04} = 0,375.$

2023

SOLUCIÓN B5

Es un problema de distribución normal donde conocemos las probabilidades y tenemos que calcular los valores de los extremos de los intervalos que determinan dichas probabilidades. Sea X una variable que sigue una distribución $N(65, 18)$. Hay que encontrar x_1, la nota máxima para estar en el nivel inicial, y x_2, la nota mínima para estar en el nivel avanzado, tales que $P(X \leq x_1) = 0,2$ y $P(X \geq x_2) = 0,15$.

Resolveremos el problema para una variable Z que sigue una distribución $N(0, 1)$ y, después, "destipificaremos" los valores obtenidos, recordando que $P(X \leq x) = P\Big(Z \leq \dfrac{x-65}{18}\Big) = P(Z \leq z)$; por tanto, $x = 65 + 18z$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(Z \leq z_1) = 0,2 \Longrightarrow\ P(Z \leq -z_1) = 0,8\ &\Longrightarrow -z_1 = 0,84 \\
&\Longrightarrow x_1 = 65 + 18 \times (-0,84) = 49,88; \\
P(z \geq z_2) = 0,15\ \Longrightarrow\ P(z \leq z_2) = 0,85\ &\Longrightarrow\ z_2 = 1,04 \\
&\Longrightarrow x_2 = 65 + 18 \times 1,04 = 83,72.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

a) El alumno o alumna que ha obtenido 85,5 puntos está en el nivel avanzado.

b) El alumno o alumna que ha obtenido 48 puntos está en el nivel inicial.

2023