Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

# Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II

## USE 2024

www.ehu.eus

| UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD* |
|---|---|
| 2024ko OHIKOA | *ORDINARIA 2024* |
| **GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II** | ***MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II*** |

- ***Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuak. Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.***
- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

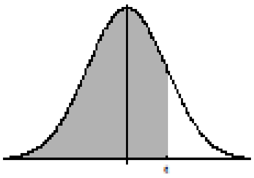
2024ko OHIKOA

**GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II**

*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

*ORDINARIA 2024*

***MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik $z$-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta $z$

| | 0 | 0'01 | 0'02 | 0'03 | 0'04 | 0'05 | 0'06 | 0'07 | 0'08 | 0'09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0'5000 | 0'5040 | 0'5080 | 0'5120 | 0'5160 | 0'5199 | 0'5239 | 0'5279 | 0'5319 | 0'5359 |
| 0'1 | 0'5398 | 0'5438 | 0'5478 | 0'5517 | 0'5557 | 0'5596 | 0'5636 | 0'5675 | 0'5714 | 0'5753 |
| 0'2 | 0'5793 | 0'5832 | 0'5871 | 0'5910 | 0'5948 | 0'5987 | 0'6026 | 0'6064 | 0'6103 | 0'6141 |
| 0'3 | 0'6179 | 0'6217 | 0'6255 | 0'6293 | 0'6331 | 0'6368 | 0'6406 | 0'6443 | 0'6480 | 0'6517 |
| 0'4 | 0'6554 | 0'6591 | 0'6628 | 0'6664 | 0'6700 | 0'6736 | 0'6772 | 0'6808 | 0'6844 | 0'6879 |
| 0'5 | 0'6915 | 0'6950 | 0'6985 | 0'7019 | 0'7054 | 0'7088 | 0'7123 | 0'7157 | 0'7190 | 0'7224 |
| 0'6 | 0'7257 | 0'7291 | 0'7324 | 0'7357 | 0'7389 | 0'7422 | 0'7454 | 0'7486 | 0'7517 | 0'7549 |
| 0'7 | 0'7580 | 0'7611 | 0'7642 | 0'7673 | 0'7704 | 0'7734 | 0'7764 | 0'7794 | 0'7823 | 0'7852 |
| 0'8 | 0'7881 | 0'7910 | 0'7939 | 0'7967 | 0'7995 | 0'8023 | 0'8051 | 0'8078 | 0'8106 | 0'8133 |
| 0'9 | 0'8159 | 0'8186 | 0'8212 | 0'8238 | 0'8264 | 0'8289 | 0'8315 | 0'8340 | 0'8365 | 0'8389 |
| 1 | 0'8413 | 0'8438 | 0'8461 | 0'8485 | 0'8508 | 0'8531 | 0'8554 | 0'8577 | 0'8599 | 0'8621 |
| 1'1 | 0'8643 | 0'8665 | 0'8686 | 0'8708 | 0'8729 | 0'8749 | 0'8770 | 0'8790 | 0'8810 | 0'8830 |
| 1'2 | 0'8849 | 0'8869 | 0'8888 | 0'8907 | 0'8925 | 0'8944 | 0'8962 | 0'8980 | 0'8997 | 0'9015 |
| 1'3 | 0'9032 | 0'9049 | 0'9066 | 0'9082 | 0'9099 | 0'9115 | 0'9131 | 0'9147 | 0'9162 | 0'9177 |
| 1'4 | 0'9192 | 0'9207 | 0'9222 | 0'9236 | 0'9251 | 0'9265 | 0'9279 | 0'9292 | 0'9306 | 0'9319 |
| 1'5 | 0'9332 | 0'9345 | 0'9357 | 0'9370 | 0'9382 | 0'9394 | 0'9406 | 0'9418 | 0'9429 | 0'9441 |
| 1'6 | 0'9452 | 0'9463 | 0'9474 | 0'9484 | 0'9495 | 0'9505 | 0'9515 | 0'9525 | 0'9535 | 0'9545 |
| 1'7 | 0'9554 | 0'9564 | 0'9573 | 0'9582 | 0'9591 | 0'9599 | 0'9608 | 0'9616 | 0'9625 | 0'9633 |
| 1'8 | 0'9641 | 0'9649 | 0'9656 | 0'9664 | 0'9671 | 0'9678 | 0'9686 | 0'9693 | 0'9699 | 0'9706 |
| 1'9 | 0'9713 | 0'9719 | 0'9726 | 0'9732 | 0'9738 | 0'9744 | 0'9750 | 0'9756 | 0'9761 | 0'9767 |
| 2 | 0'9772 | 0'9778 | 0'9783 | 0'9788 | 0'9793 | 0'9798 | 0'9803 | 0'9808 | 0'9812 | 0'9817 |
| 2'1 | 0'9821 | 0'9826 | 0'9830 | 0'9834 | 0'9838 | 0'9842 | 0'9846 | 0'9850 | 0'9854 | 0'9857 |
| 2'2 | 0'9861 | 0'9864 | 0'9868 | 0'9871 | 0'9875 | 0'9878 | 0'9881 | 0'9884 | 0'9887 | 0'9890 |
| 2'3 | 0'9893 | 0'9896 | 0'9898 | 0'9901 | 0'9904 | 0'9906 | 0'9909 | 0'9911 | 0'9913 | 0'9916 |
| 2'4 | 0'9918 | 0'9920 | 0'9922 | 0'9925 | 0'9927 | 0'9929 | 0'9931 | 0'9932 | 0'9934 | 0'9936 |
| 2'5 | 0'9938 | 0'9940 | 0'9941 | 0'9943 | 0'9945 | 0'9946 | 0'9948 | 0'9949 | 0'9951 | 0'9952 |
| 2'6 | 0'9953 | 0'9955 | 0'9956 | 0'9957 | 0'9959 | 0'9960 | 0'9961 | 0'9962 | 0'9963 | 0'9964 |
| 2'7 | 0'9965 | 0'9966 | 0'9967 | 0'9968 | 0'9969 | 0'9970 | 0'9971 | 0'9972 | 0'9973 | 0'9974 |
| 2'8 | 0'9974 | 0'9975 | 0'9976 | 0'9977 | 0'9977 | 0'9978 | 0'9979 | 0'9979 | 0'9980 | 0'9981 |
| 2'9 | 0'9981 | 0'9982 | 0'9982 | 0'9983 | 0'9984 | 0'9984 | 0'9985 | 0'9985 | 0'9986 | 0'9986 |
| 3 | 0'9987 | 0'9987 | 0'9987 | 0'9988 | 0'9988 | 0'9989 | 0'9989 | 0'9989 | 0'9990 | 0'9990 |
| 3'1 | 0'9990 | 0'9991 | 0'9991 | 0'9991 | 0'9992 | 0'9992 | 0'9992 | 0'9992 | 0'9993 | 0'9993 |
| 3'2 | 0'9993 | 0'9993 | 0'9994 | 0'9994 | 0'9994 | 0'9994 | 0'9994 | 0'9995 | 0'9995 | 0'9995 |
| 3'3 | 0'9995 | 0'9995 | 0'9995 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9996 | 0'9997 |
| 3'4 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9997 | 0'9998 |
| 3'5 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9998 |
| 3'6 | 0'9998 | 0'9998 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 |
| 3'7 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 |
| 3'8 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 | 0'9999 |
| 3'9 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 | 1'0000 |

**BLOKEA: ALJEBRA**

**A.1.** $[\![\textit{gehienez } 2,5 \textit{ puntu}]\!]$

Hiru problema zituen matematika-azterketa batean, Aitorrek 7,2 puntuko kalifikazioa lortu zuen guztira.

Lehenengo probleman lortutako puntuazioa bigarrenean lortutakoa baino % 40 handiagoa izan zen, eta hirugarren probleman lortutako puntazioa lehenengoan eta bigarrenean lortutako puntuazioen baturaren bikoitza izan zen.

Zer puntuazio lortu zuen Aitorrek problema bakoitzean?

**B.1.** $[\![\textit{gehienez } 2,5 \textit{ puntu}]\!]$

Gozotegi batek bi trufa mota egiten ditu: gozoak eta mingotsak. Trufa gozo bakoitzak 20 g kakao, 20 g esnegain eta 30 g azukre ditu, eta unitatea 1 €-ean saltzen da. Trufa mingots bakoitzak 100 g kakao, 20 g esnegain eta 15 g azukre ditu eta 1,3 €-an saltzen da unitatea.

| | **Kakaoa** | **Esnegaina** | **Azukrea** | **Prezioa** |
|---|---|---|---|---|
| **Trufa gozoa** | 20 g | 20 g | 30 g | 1 € |
| **Trufa mingotsa** | 100 g | 20 g | 15 g | 1,3 € |
| **ESKURAGARRITASUNA** | 30 kg | 8 kg | 10,5 kg | |

Egun jakin batean, gozotegiak 30 kg kakao, 8 kg esnegain eta 10,5 kg azukre besterik ez du.

Egiten den guztia saltzen duela jakinik:

a) $[\![2,2 \textit{ puntu}]\!]$ Mota bakoitzeko zenbat trufa egin behar dira egun horretan diru-sarrerak maximizatzeko?

b) $[\![0,3 \textit{ puntu}]\!]$ Zenbat da aipatutako diru-sarrera maximo hori?

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2024ko OHIKOA

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2024

# GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

# *MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II*

**BLOKEA: ANALISIA**

**A.2.** $[\![\, \boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu} ]\!]$

Izan bedi $f(x)$ hirugarren mailako funtzio polinomiko bat non hirugarren mailako gaiaren koefizientea 1 den.

a) $[\![\, \boldsymbol{1\ puntu} ]\!]$ Aurkitu itzazu funtzioaren beste koefizienteen balioak, jakinda funtzioa $(0\,,0)$ puntutik igarotzen dela eta $(2,-4)$ puntuan mutur erlatibo bat duela.

b) $[\![\, \boldsymbol{0,75\ puntu} ]\!]$ Zehaztu itzazu $f(x) = x^3 - 3\,x^2$ funtzioaren maximo eta minimo erlatiboak, eta inflexio-puntuak.

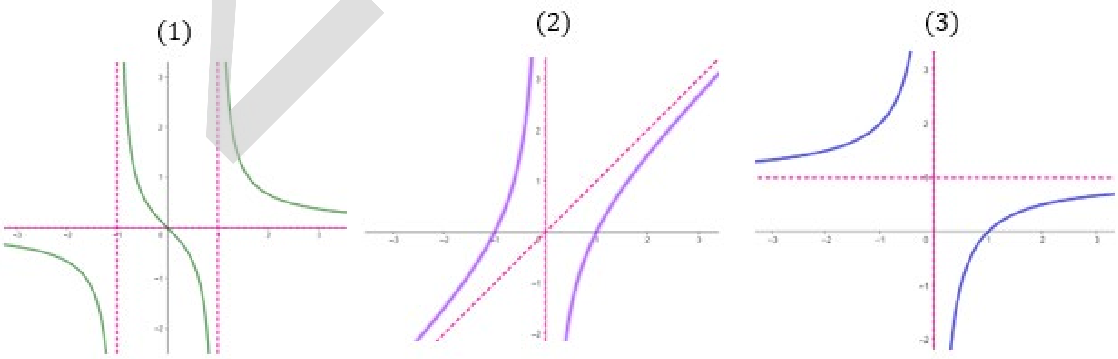
c) $[\![\, \boldsymbol{0,75\ puntu} ]\!]$ Kalkula ezazu $f(x) = x^3 - 3\,x^2$ funtzioaren grafikoak eta abzisa-ardatzak mugatutako eskualde finituaren azalera.

**B.2.** $[\![\boldsymbol{gehienez\ 2,5\ puntu} ]\!]$

a) $[\![\, \boldsymbol{0,9\ puntu} ]\!]$ Lotu itzazu, arrazoituta, funtzio hauek:

$$A)\ \ f(x) = \frac{x-1}{x}\ \ ; \qquad B)\ \ g(x) = \frac{x}{x^2-1}\ \ ; \qquad C)\ \ h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

honako adierazpen grafiko hauekin:




b) $[\![\, \boldsymbol{1,6\ puntu} ]\!]$ Kasu bakoitzean, adierazpen grafikotik abiatuta, adieraz itzazu funtzioaren definizio-eremua, ibilbidea eta gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

**BLOKEA: PROBABILITATEA**

**A.3.** $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Asierrek 4 bola berde eta 2 gorri dituen kutxa bat dauka. Txanpon bat jaurtitzen du eta, aurkia (aurpegia) lortzen badu, bola bat ateratzen du kutxatik; aldiz, ifrentzua (gurutzea) lortzen bada, bi bola ateratzen ditu kutxatik, itzulerarik gabe.

a) $[\![\ 0,5\ puntu]\!]$ Zein da Asierrek bi bola gorri ateratzeko probabilitatea?

b) $[\![\ 0,75\ puntu]\!]$ Kalkula ezazu Asierrek bola gorririk ez ateratzeko probabilitatea.

c) $[\![\ 0,75\ puntu]\!]$ Kalkula ezazu Asierrek gutxienez bola berde bat ateratzeko probabilitatea.

d) $[\![\ 0,5\ puntu]\!]$ Gutxienez bola berde bat atera izan dela jakinda, kalkula ezazu txanponaren jaurtiketan aurpegia atera izanaren probabilitatea.

**B.3.** $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Auzo jakin batean bi gozotegi daude. Biztanleriaren % 40k A gozotegian erosten du, % 25ek B gozotegian, eta % 15ek bietan.

Zoriz pertsona bat aukeratzen da:

a) $[\![0,8\ puntu]\!]$ Zein da pertsona horrek A gozotegian erosteko eta B gozotegian ez erosteko probabilitatea?

b) $[\![\ 0,35\ puntu]\!]$ Pertsona hori A gozotegiko bezeroa baldin bada, zein da B gozotegiko bezeroa ere izateko probabilitatea?

c) $[\![\ 0,35\ puntu]\!]$ Zein da ez A gozotegiko bezeroa ezta B gozotegikoa ere izateko probabilitatea?

d) $[\![\ 1\ puntu]\!]$ Askeak al dira "A-ko bezero izatea" eta "B-ko bezero izatea" gertaerak? Arrazoitu ezazu zure erantzuna.

## BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

**A.4.** $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematikako azterketa batean, aztertutako ikasleen % 35ek 6,8 puntu baino gehiago lortu zuen.

Badakigu azterketa horretan lortutako puntuazioak 5,8 puntuko batezbestekoa duen banaketa normal bati jarraitzen diola.

a) $[\![0,75\ puntu]\!]$ Kalkula ezazu puntuazioaren banaketaren desbideratze tipikoa.

b) $[\![0,75\ puntu]\!]$ Desbideratze tipikoa 2,6 puntu baldin bada, zer puntuazio gainditzen du ikasleen % 20k soilik?

c) $[\![1\ puntu]\!]$ Desbideratze tipikoa 2,6 puntu baldin bada, eta *Gai* kalifikazioa 5 puntu edo gehiagorekin lortzen bada, ikasleen zer portzentajek lortu du gai izatea azterketa horretan?

**B.4.** $[\![gehienez\ 2,5\ puntu]\!]$

Zoriz aukeratutako 25 urteko 1000 euskal gaztetik 140 soilik ez ziren gurasoekin bizi.

a) $[\![1,25\ puntu]\!]$ Zenbatets ezazu gurasoekin bizi diren 25 urteko euskal gazteen populazioaren portzentajea, % 95eko konfiantza-mailaz.

b) $[\![0,75\ puntu]\!]$ Kalkula ezazu aipatutako konfiantza-mailarako egindako errore maximo onargarria.

c) $[\![0,5\ puntu]\!]$ Azaldu itzazu lortutako emaitzak.

# GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

## EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi problemaz osatuta dago.
2. ***Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.***
3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.
6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

## BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, …
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

## BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa –3,7 hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa 2,5 dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.

## ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

### BLOKEA: ALJEBRA

### A.1. ariketa *( gehienez 2,5 puntu)*

- Problemaren planteamendua, **1 puntu.**
- Cramer-en erregela erabil daitekeela egiaztatzea, **0,3 puntu.**
- Hiru aldagaien kalkulua, 0,4 puntu aldagai bakoitza, **1,2 puntu.**

### B.1. ariketa *( gehienez 2,5 puntu)*

**a. 2,2 puntu**

- Helburu-funtzioa zehaztea, **0,1 puntu.**
- Murrizketak determinatzea, **0,2 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea eta zehaztea,
    - Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu; beraz, **0,3 puntu.**
    - Bideragarritasun-eskualdea zehaztea, **0,4 puntu.**
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea.
    - A erpina, **0,1 puntu.**
    - B erpina, **0,1 puntu.**
    - C erpina, **0,2 puntu.**
    - D erpina, **0,1 puntu.**
    - E erpina, **0,1 puntu.**
- Funtzioak erpinetan duen balioa lortzea, **0,5 puntu.**
- Maximoa zehaztea, **0,1 puntu.**

**b. 0,3 puntu.**

- Funtzioaren balioa puntu maximoan, **0,3 puntu.**

## BLOKEA: ANALISIA

### A.2. ariketa *( gehienez 2,5 puntu)*

a. **1 puntu.**
   - (0, 0) funtzioaren puntu bat da, **0,25 puntu.**
   - (2, -4) funtzioaren puntu bat da, **0,25 puntu.**.
   - (2, -4) puntuan funtzioak maximoa erlatiboa du, **0,5 puntu.**

b. **0,75 puntu.**
   - Maximoa eta minimoa kalkulatzea, **0,5 puntu.**
   - Inflexio-puntuak lortzea, **0,25 puntu.**

c. **0,75 puntu.**
   - Irudikapen grafikoa, **0,3 puntu.**
   - Integralaren kalkulua, **0,3 puntu.**
   - Barrow-en erregelaren bidez esparruaren azalera kalkulatzea, **0,15 puntu.**

**B.2. ariketa** ***( gehienez 2,5 puntu)***

**a. 0,9 puntu.**

- (A) grafikoa bere funtzioarekin lotzea modu arrazoituan, **0,3 puntu.**
- (B) grafikoa bere funtzioarekin lotzea modu arrazoituan, **0,3 puntu.**
- (C) grafikoa bere funtzioarekin lotzea modu arrazoituan, **0,3 puntu.**

**b. 1,6 puntu.**

- Grafikoa $A)\ f(x)$
  - **i.** Definizio-eremua, **0,2 puntu.**
  - **ii.** Ibilbidea, **0,15 puntu.**
  - **iii.** Gorakortasun-tartea, **0,15 puntu.**
- Grafika $B)\ g(x)$
  - **i.** Definizio-eremua, **0,2 puntu.**
  - **ii.** Ibilbidea, **0,15 puntu.**
  - **iii.** Beherakortasun-tartea, **0,15 puntu.**
- Grafika $C)\ h(x)$
  - **i.** Definizio-eremua, **0,3 puntu.**
  - **ii.** Ibilbidea, **0,15 puntu.**
  - **iii.** Gorakortasun-tartea, **0,15 puntu.**

## BLOKEA: PROBABILITATEA

### A.3. ariketa *( gehienez 2,5 puntu)*

a. **0,5 puntu.**
   - Zuhaitz-diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,25 puntu.**
   - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu.**

b. **0,75 puntu.**
   - Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,25 puntu.**
   - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

c. **0,75 puntu.**
   - Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,15 puntu.**
   - Gertaeraren probabilitatea adieraztea, **0,35 puntu.**
   - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu.**

d. **0,5 puntu.**
   - Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
   - A posteriori probabilitatea, Bayes-en teorema, adieraztea, **0,2 puntu.**
   - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**

### B.3. ariketa *( gehienez 2,5 puntu)*

a. **0,8 puntu.**
   - Venn diagrama egitea, **0,4 puntu**.
   - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,4 puntu.**

b. **0,35 puntu.**
   - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,35 puntu.**

c. **0,35 puntu.**
   - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,35 puntu.**

d. **1 puntu.**
   - Adieraztea zer esan nahi duen bi gertaera askeak izateak, **0,6 puntu.**
   - Kalkuluak **0,2 puntu.**
   - Ondorioztatzea gertaerak nolakoak diren, **0,2 puntu.**

## BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

### A.4. ariketa ***( gehienez 2,5 puntu)***

**a. 0,75 puntu.**
- Problemaren planteamendua, **0,2 puntu.**
- Aldagaiaren tipifikazioa, **0,2 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,2 puntu.**
- Ekuazioa ebaztea eta $\sigma$ lortzea, **0,15 puntu.**

**b. 0,75 puntu.**
- Problemaren planteamendua, **0,2 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako *k* balioa zehaztea, **0,25 puntu.**

**c. 1 puntu.**
- Problemaren planteamendua, **0,3 puntu**.
- Taulan kontsultatutako probabilitateen balioak zehaztea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako portzentajea, **0,4 puntu.**

### B.4. ariketa ***( gehienez 2,5 puntu)***

**a. 1,25 puntu.**
- Laginaren proportzioa zer den badakiela adieraztea, **0,2 puntu.**
- Proportziorako konfiantza-tartearen formula zehaztea, **0,25 puntu.**
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ determinatzea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako konfiantza-tartea, **0,35 puntu.**
- Eskatutako portzentajea zehaztea, **0,15 puntu.**

**b. 0,75 puntu.**
- Errore maximo onargarria zer den adieraztea, **0,25 puntu.**
- Errorearen formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Errorearen kalkulua, **0,3 puntu.**

**c. 0,5 puntu.**
- Lortutako emaitzak arrazoitzen ditu, nahiz eta zenbakiz zuzenak ez izan, **0,5 puntu.**

## EBAZPENAK

### BLOKEA: ALJEBRA

**A.1** *Gizarte-errealitatearen egoera hizkuntza aljebraikoan adierazteko problema. Cramer-en erregelaren erabilera.*

Aldagaiak zehaztuko ditugu

$$\begin{cases} x = Aitorrek\ lehenengo\ probleman\ lortutako\ puntuazioa \\ y = Aitorrek\ bigarren\ probleman\ lortutako\ puntuazioa \\ z = Aitorrek\ hirugarren\ probleman\ lortutako\ puntuazioa \end{cases}$$

Aldagai horien arabera, honako sistema hau lortuko dugu:

$$\begin{cases} x + y + z = 7{,}2 \\ x = y + 0{,}4\,y \\ z = 2\,(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 72 \\ x = 1{,}4\,y \\ z = 2\,x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y + 5z = 36 \\ 10x - 14\,y = 0 \\ 2\,x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y + 5z = 36 \\ 5x - 7\,y = 0 \\ 2\,x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Cramer-en metodoa erabil dezakegula egiaztatuko dugu, hau da, koefizienteen matrizearen determinantea nulua ez dela.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\,(7 + 10 + 14 + 5) = 180 \neq 0$$

Beraz, Cramer-en erregelaren bidez ebatziko dugu:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 5 & 5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{180} = \frac{252}{180} = 1{,}4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 36 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{180} = \frac{180}{180} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 36 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{180} = \frac{360 + 504}{180} = \frac{864}{180} = 4{,}8$$

Beraz;

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x = Aitorrek\ lehenengo\ probleman\ lortutako\ puntuazioa = 1{,}4\ puntu} \\ &\boldsymbol{y = Aitorrek\ bigarren\ probleman\ lortutako\ puntuazioa = 1\ puntu} \\ &\boldsymbol{z = Aitorrek\ hirugarren\ probleman\ lortutako\ puntuazioa = 4{,}8\ puntu} \end{aligned}$$

**B.1** *Gizarte-errealitatearen egoera hizkuntza aljebraikoan adierazteko problema. Bi aldagaiko programazio linealeko problemaren ebazpena.*

**a)** Mota bakoitzeko egin beharreko trufa- kopurua diru-sarrerak maximizatzeko.

| | Kakaoa | Esnegaina | Azukrea | Prezioa | Aldagaiak |
|---|---|---|---|---|---|
| **Trufa gozoa** | 20 g | 20 g | 30 g | 1 € | x |
| **Trufa mingotsa** | 100 g | 20 g | 15 g | 1,3 € | y |
| **Eskuragarritasuna** | 30.000 g | 8.000 g | 10.500 g | | |

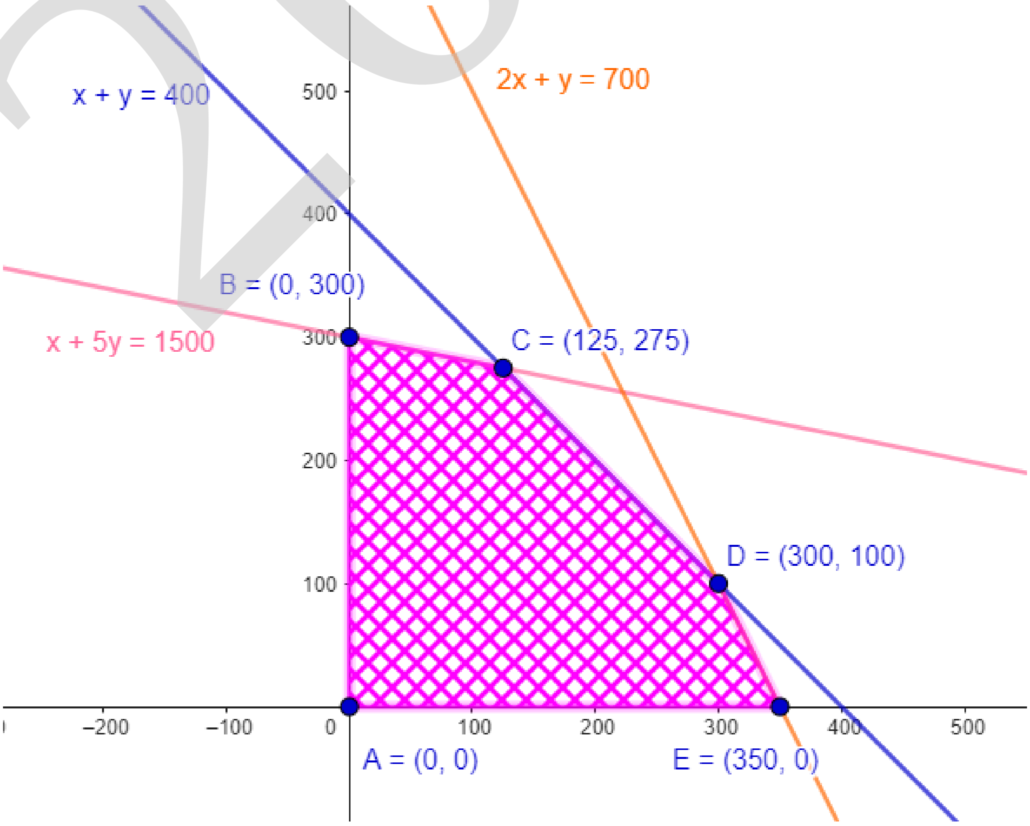
- Helburu-funtzioa hau da:

$f(x,y) = x + 1{,}3\,y$

- Murrizketak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 100y \leq 30.000 \\ 20x + 20y \leq 8000 \\ 30\,x + 15\,y \leq 10.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \end{cases}$$

- Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



- C erpinaren kalkulua:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ x+5y=1500 \end{cases} \Rightarrow\ x=400-y\ \Rightarrow\ 400-y+5y=1500\ \Rightarrow\ \begin{matrix} x=125 \\ y=275 \end{matrix} \Rightarrow\ C(125,275)$$

- D erpinaren kalkulua:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ 2x+y=700 \end{cases} \Rightarrow\ x=300\ \Rightarrow\ y=100\ \Rightarrow\ \begin{matrix} x=300 \\ y=100 \end{matrix} \Rightarrow\ D(300,100)$$

Beraz, erpinak hauek dira:

$$A(0,0),\quad B(0,300),\quad C(125,275),\quad D(300,100),\quad E(350,0)$$

- Erpin horietan helburu-funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatuko ditugu:

$$f(A)=f(0,0)=0$$

$$f(B)=f(0,300)=390$$

$$f(C)=f(125,275)=482{,}5$$

$$f(D)=f(300,100)=430$$

$$f(E)=f(350,0)=350$$

- Funtzioaren balio maximoa $\boldsymbol{C(125,\ 275)}$ puntuan lortzen da; ondorioz, **125 trufa gozo eta 275 trufa mingots** egin behar dira diru-sarrera maximoa lortzeko.

**b)** Diru-sarrera maximoa.

$$f(x,y)=f(C)=f(125,275)=482{,}5$$

Horrela, **diru-sarrera maximoa 482,5 €** da.

**BLOKEA: ANALISIA**

**A.2** *Funtzio baten parametroak eta maximo eta minimo erlatiboak kalkulatzea.*

**a)** Zehaztu $a, b, c$ , non $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- Funtzioa $(0, 0)$ puntutik igarotzen da $\Longrightarrow f(0) = 0 \quad \Longrightarrow c = 0$

Ondorioz, $\boldsymbol{f(x) = x^3 + ax^2 + bx}$

- Funtzioa $(2, -4)$ puntutik igarotzen da $\Longrightarrow f(\,2\,) = -\,4 \Longrightarrow 8 + 4a + 2b = -4 \Longrightarrow$

$2a + b = -6$

- $x = 2$ mutur erlatiboa $\Longrightarrow f'(\,2\,) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\Longrightarrow\; f'(\,2\,) = 0 = 12 + 4a + b \;\Longrightarrow\; 4a + b = -12$

Beraz:

$\begin{cases} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -12 \end{cases} \quad \Longrightarrow a = -3$ eta $b = 0$ **Hau da:** $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2}$

**b)** Maximo eta minimo erlatiboak eta inflexio-puntuak

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

- Maximo eta minimo erlatiboen definizioa hau da:

$$f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow x_0 \; puntu \; singularrak$$

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \wedge \begin{cases} f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \quad x_0 \; maximo \; erlatiboa \\ f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \quad x_0 \; minimo \; erlatiboa \end{cases}}$$

✓ $f'(\,x) = 0 \;\Longrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ eta $x = 2$ puntu singularrak

✓ $f''(\,x) = 6x - 6 \;\Longrightarrow$

$f''(\,0) = -6 \;< 0 \Longrightarrow \; x = 0$ maximoa, hau da, $(\,\mathbf{0},\; \mathbf{0}\,)$ **maximo erlatiboa**

$f''(\,2) = 6 > 0 \;\Longrightarrow\; x = 2$ minimoa, hau da, $(\,\mathbf{2},\; -\mathbf{4}\,)$ **minimo erlatiboa**

- Inflexio-puntuaren definizioa hau da:

$$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, f(x_0)) \ \boldsymbol{inflexio-puntua}$$

- ✓ $f''(x) = 6x - 6 = 0 \implies x = 1$
- ✓ $f'''(x) = 6 \ \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$

Orduan $x = 1$ puntua inflexio-puntua da, hau da, $(\mathbf{1}, \mathbf{-2})$ **inflexio-puntua**

**c)** Funtzioaren grafikoak eta abzisa-ardatzak mugatutako eskualde finituaren azalera.

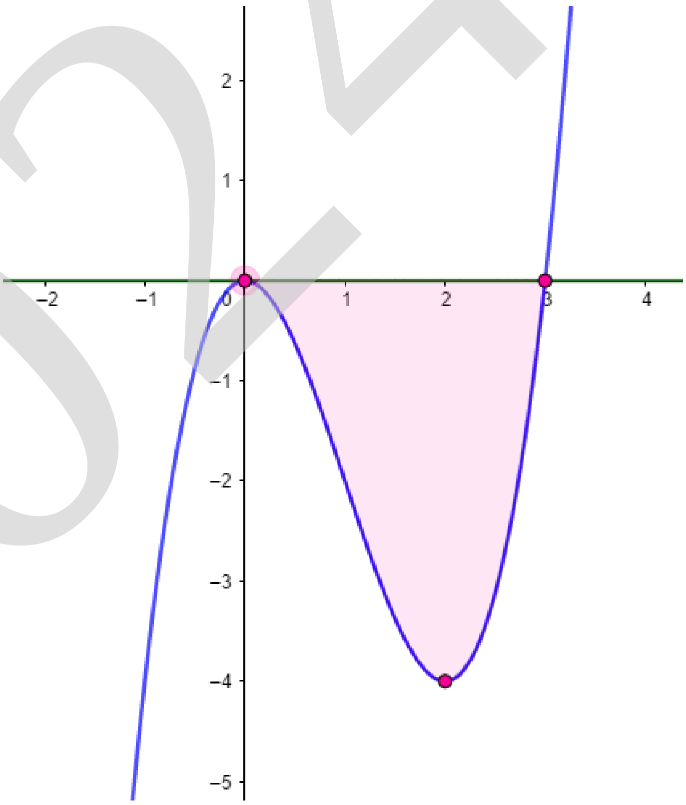
Azalera kalkulatzeko, integral mugatu hau zehaztu eta ebatziko dugu:

$$A = \int_0^3 [0 - (x^3 - 3x^2)]\, dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)\, dx =$$

$$= \left[ -\frac{x^4}{4} + 3\,\frac{x^3}{3} \right]_0^3 =$$

$$= \left[ -\frac{x^4}{4} + 3\,\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{4} u^2$$




Hau da:

$$\boldsymbol{A = \frac{27}{4} u^2}$$

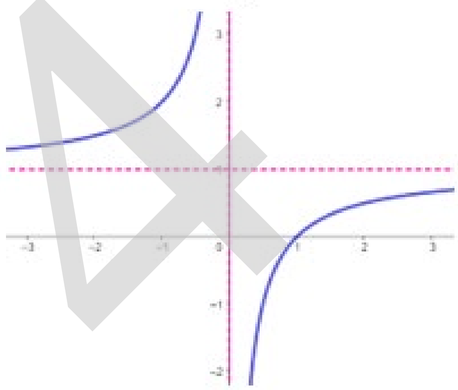
**B.2** *Funtzioak adierazpen grafikoekin lotzea. Funtzio baten definizio-eremua, ibilbidea eta gorakor-beherakor-tarteak identifikatzea eta zehaztea.*

**a)** Lotu, arrazoituz, A), B) eta C) funtzioak (1), (2) eta (3) grafikoekin.

- Funtzioa aztertuko dugu:

$$A)\ f(x) = \frac{x-1}{x}$$

(3)



- $f(x)$ funtzioa ez dago definituta $x = 0$ puntuan.
- $(-1\,,2)$ eta $(1\,,0)$ puntuetatik igarotzen da.
- $f(x)$ funtzioak $x = 0$ puntuan asintota bertikal bat du.
- $f(x)$ funtzioak $y = 1$ puntuan asintota horizontal bat du.

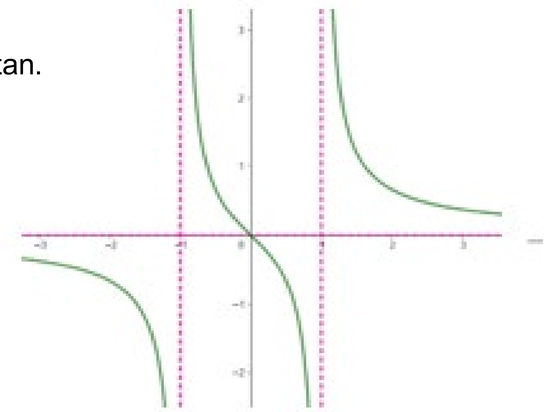
Ezaugarri horiek dituen funtzio bakarra (3) da.

Beraz, **A) = (3).**

- Funtzioa aztertuko dugu:

$$B)\ g(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

(1)



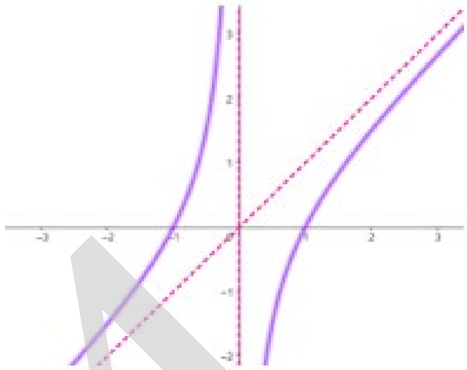
- $g(x)$ ez dago definitua $x = -1$ eta $x = 1$ puntuetan.
- $(0{,}0)$ puntutik igarotzen da.
- $g(x)$ funtzioak $x = 1$ puntuan asintota bertikal bat du.
- $g(x)$ funtzioak $x = -1$ puntuan beste asintota bertikal bat du.
- $g(x)$ funtzioak $y = 0$ puntuan asintota horizontal bat du.

Ezaugarri horiek dituen funtzio bakarra (1) da.

Beraz, **B) = (1)**

- Funtzioa aztertuko dugu:

(2)



$C)\ h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

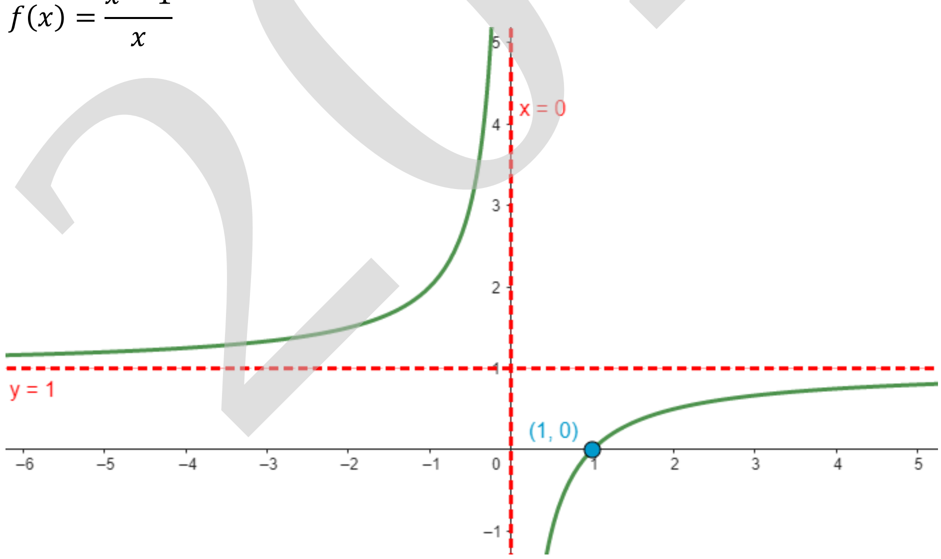
- $h(x)$ ez dago definitua $x = 0$ puntuan.
- $(-1\,,0)$ eta $(1\,,0)$ puntuetatik igarotzen da.
- $h(x)$ funtzioak $x = 0$ puntuan asintota bertikal bat du.
- $h(x)$ funtzioaren asintota zeiharra $y = x$ zuzena da.

Ezaugarri horiek dituen funtzio bakarra (2) da.

Beraz, **C) = (2)**

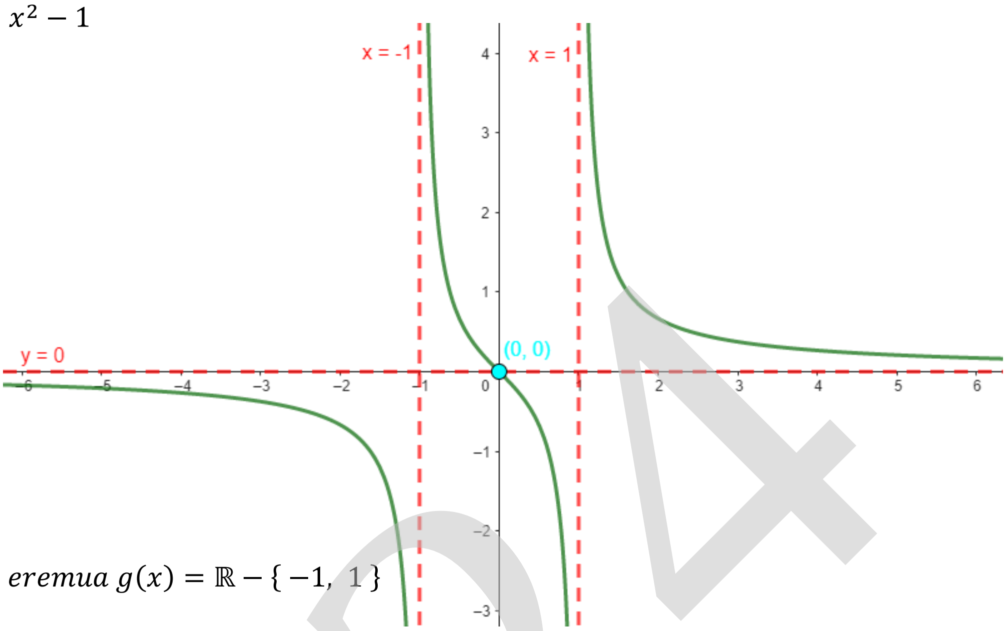
**b)** Kasu bakoitzean, adieraz itzazu funtzioaren definizio-eremua, ibilbidea eta gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

$A)\ f(x) = \dfrac{x-1}{x}$



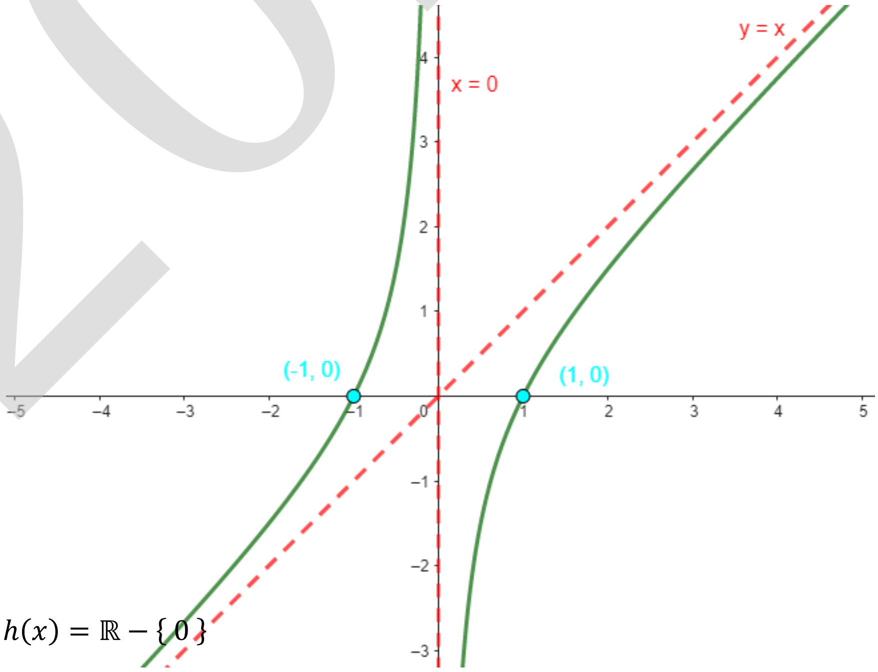

- $Definizio - eremua\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $Ibilbidea\ f(x) = \mathbb{R} - \{\,1\}$
- Gorakorra da $(-\infty, 0) \cup (0,\ \infty)$ tarteetan.

$B)\ g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$




- $Definizio - eremua\ g(x) = \mathbb{R} - \{\,-1,\ 1\,\}$
- $Ibilbidea\ g(x) = \mathbb{R}$
- Beherakorra da $(-\infty, -1) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ \infty)$ tarteetan.

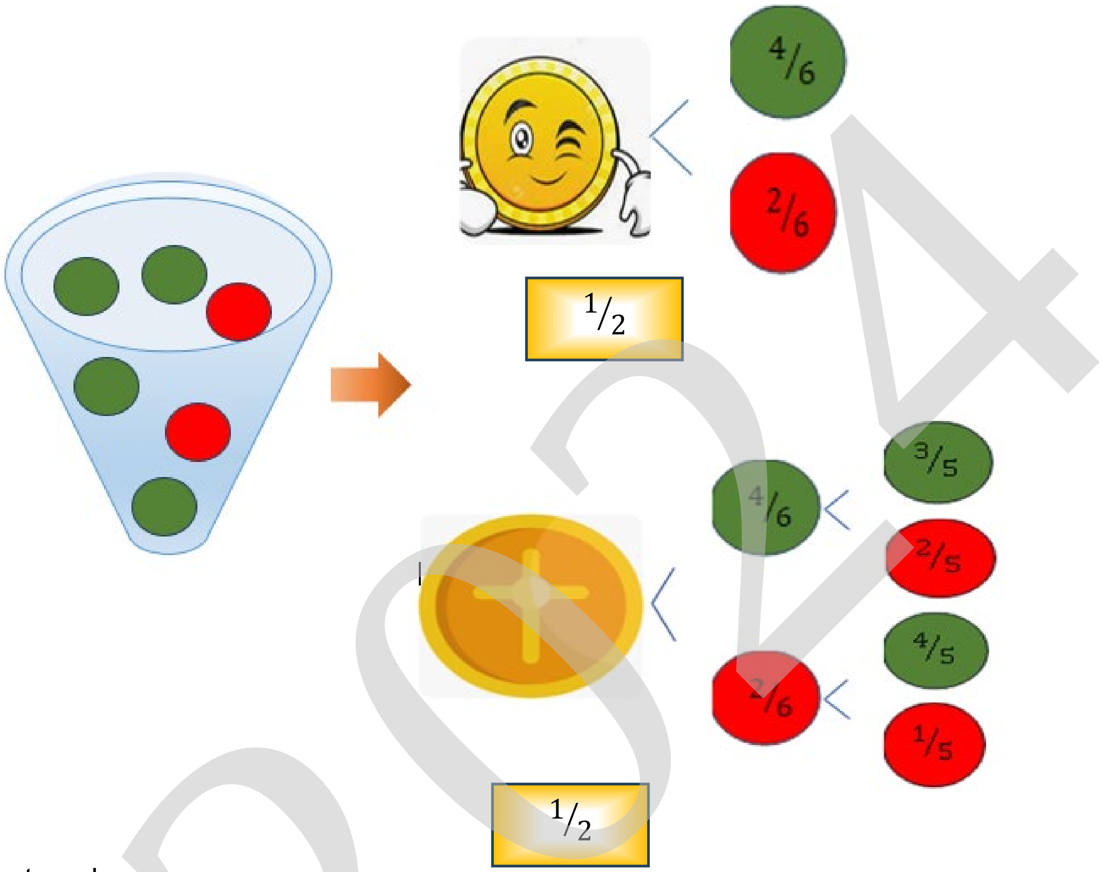
$C)\ h(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$




- $Definizio - eremua\ h(x) = \mathbb{R} - \{\,0\,\}$
- $Ibilbidea\ h(x) = \mathbb{R}$
- Gorakorra da $(-\infty, 0\,) \cup (\,0,\ \infty)$ tarteetan.

## BLOKEA: PROBABILITATEA

**A.3** *Probabilitate bat kalkulatzea zuhaitz-diagramaren bidez edo probabilitate totalaren bidez. Bayes-en teorema.*




Gertaerak:

$B_1 = lehenengo\ bola\ berdea$ $\qquad$ $B_2 = bigarren\ bola\ berdea$

$G_1 = lehenengo\ bola\ gorria$ $\qquad$ $G_2 = bigarren\ bola\ gorria$

**a)** Zein da Asierrek bi bola gorri ateratzeko probabilitatea?

$$P(\,G_1 \cap\ G_2\,) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(G_1 \cap\ G_2) = 0{,}03333} \ = \%\ \mathbf{3{,}33}$$

**b)** Kalkula ezazu bola gorririk ez ateratzeko probabilitatea.

$$P(\,ezta\ gorri\ bat\ ere) = \ P(\,aurki \cap\ B_1\,) + \ P(ifrentzu\ \cap B_1 \cap\ B_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \ = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ = \frac{8}{15} \ = 0{,}5333 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(\,ezta\ gorri\ bat\ ere) = 0{,}5333 = \%\ \ 53{,}33}$$

**c)** Kalkula ezazu gutxienez bola berde bat ateratzeko probabilitatea.

$$P\ (gutxienez\ bola\ berde\ bat) = 1 - P\ (\ ezta\ berde\ bat\ ere) =$$

$$= 1 - \left( P(aurki\ \cap\ G_1\ ) + P(ifrentzu \cap G_1 \cap G_2) \right) = 1 - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \right)$$

$$= 1 - \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \right) = 1 - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(gutxienez\ bola\ berde\ bat) = \%\ 80}$$

**BESTE MODU BAT**

$$P(gutxienez\ bola\ berde\ bat) = P(bola\ berde\ bat) + P(bi\ bola\ berde) =$$

$$= \left( P(aurki \cap B_1\ ) + P(ifrentzu \cap B_1 \cap G_2) + P(ifrentzu \cap G_1 \cap B_2) \right)$$

$$+ P(ifrentzu \cap B_1 \cap B_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

**d)** Gutxienez bola berde bat atera izan dela jakinda, kalkula ezazu txanponaren jaurtiketan aurkia (aurpegia) atera izanaren probabilitatea.

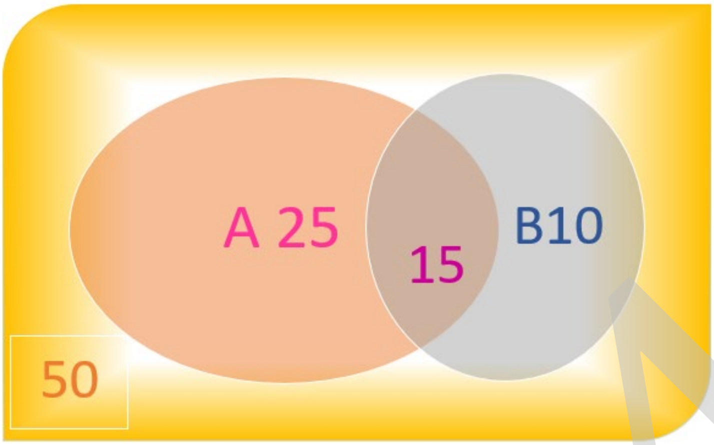
Bayesen teorema erabiliko dugu:

$$P(aurki \mid gutxienez\ bola\ berde\ bat) = \frac{P(\ aurki\ ) \cdot P(\ gutxienez\ bola\ berde\ bat \mid aurki)}{P(gutxienez\ bola\ berde\ bat)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{12} = 0{,}4167 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(aurki \mid gutxienez\ bola\ berde\ bat) = 0{,}4167\ = \%\ 41{,}67}$$

**B.3** *Probabilitateen kalkuluei buruzko ariketa.*




**a)** Zein da pertsona horrek A gozotegian erosteko eta B gozotegian ez erosteko probabilitatea?.

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25 \Longrightarrow \boldsymbol{P(A \cap B^c) = \%\,25}$

**b)** Pertsona hori A gozotegiko bezeroa bada, zein da B gozotegiko bezeroa ere izateko probabilitatea?

$$P(\ B\,|\,A\ ) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375 \Longrightarrow \boldsymbol{P(\ B\,|\,A\ ) = \%\,37{,}5}$$

**c)** Zein da ez A gozotegiko bezeroa ezta B gozotegikoa ere izateko probabilitatea?

$$P(A^C \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{P\left(A^C \cap B^c\right) = \%\,50}$$

**d)** Askeak al dira "A-ko bezero izatea" eta "B-ko bezero izatea" gertaerak?

"A-ko bezero izatea" eta "B-ko bezero izatea" askeak dira $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P(A-ko\ bezeroa\ izatea\ |\ B-ko\ bezeroa\ izatea) = P(A-ko\ bezeroa\ izatea\ ) \\ P(B-ko\ bezeroa\ izatea\ |A-ko\ bezeroa\ izatea) = P(B-ko\ bezeroa\ izatea) \end{cases}$$

- $P(A-ko\ bezeroa\ izatea\ |\ B-ko\ bezeroa\ izatea) = \frac{15}{25} = 0{,}6$
- $P(A-ko\ bezeroa\ izatea\ ) = 0{,}4$

$\Rightarrow P(A-ko\ bezeroa\ izatea\ |\ B-ko\ bezeroa\ izatea) \neq P(A-ko\ bezeroa\ izatea\ )$

Beraz, "A-ko bezero izatea" eta "B-ko bezero izatea" gertaerak ez dira askeak: **menpekoak dira**.

## BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

**A.4** *Banaketa normala ulertzea, erabiltzea eta probabilitatea kalkulatzea.*

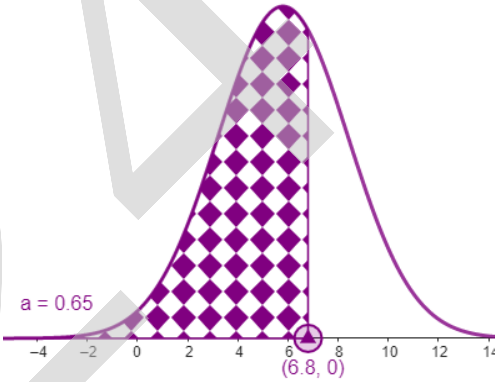
Azterketan lortutako emaitza $X \equiv \mathcal{N}\,(5{,}8\,,\ \sigma\,)$, non $P(\,X >\ 6{,}8\,) = 0{,}35$ den.

**a)** Desbideratze tipikoaren kalkulua.

$$P(\,X >\ 6{,}8\,) = 0{,}35 \Rightarrow P(\,X \le 6{,}8\,) = 0{,}65 \implies$$

$$\implies P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{6{,}8-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}65 \Rightarrow$$

$$\implies P\left(Z \le \frac{6{,}8-5{,}8}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}65$$




Banaketaren taulan $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$ bilatuko dugu:

$$P\left(\,Z \le \frac{1}{\sigma}\,\right) = 0{,}65$$

Beraz:

$$\frac{1}{\sigma} = 0{,}385 \implies \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{0{,}385} = \mathbf{2{,}597}$$

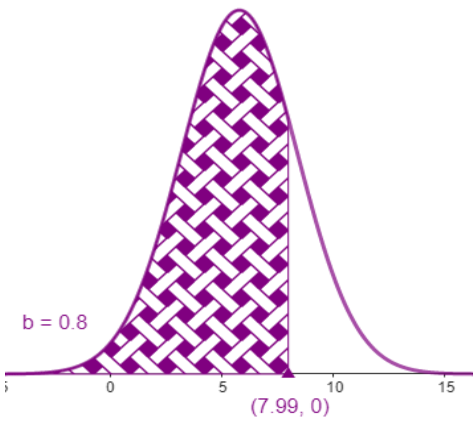
**b)** $\sigma = 2{,}6$ bada $\implies X \equiv \mathcal{N}\,(5{,}8\,,\ 2{,}6\,)$

Ikasleen % 20k soilik gainditzen duen $k$ puntuazioaren balioa kalkulatuko dugu $\implies$

$$P(\,X >\ k\,) = 0{,}2 \implies$$

$$\implies P(\,X \le k\,) = 0{,}8 \implies P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \implies$$

$$\implies P\left(Z \le \frac{k-5{,}8}{2{,}6}\right) = 0{,}8$$




Banaketaren taulan $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$ bilatuko dugu:

$$\frac{k-5{,}8}{2{,}6} = 0{,}845 \Rightarrow \boldsymbol{k = 5{,}8 + 0{,}845 \cdot 2{,}6 = 7{,}997}$$

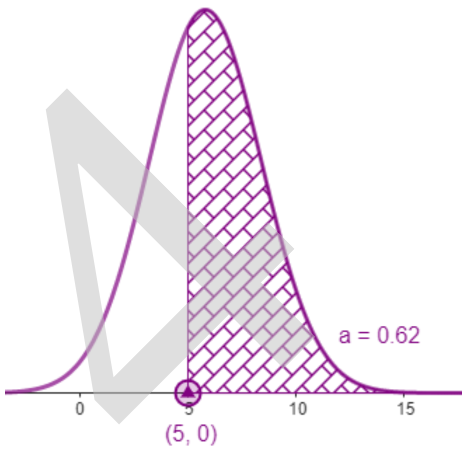
**Beraz, gutxi gorabehera ikasleen % 20k lortzen du 8 puntutik gorako emaitza.**

**c)** $\sigma = 2{,}6$ bada, azterketa gainditu duten ikasleen portzentajea kalkulatuko dugu:

$$X \equiv \mathcal{N}\,(5{,}8\,,\ 2{,}6\,)$$

$$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5-5{,}8}{2{,}6}\right) =$$

$$= P(Z \geq -0{,}31) = P(Z \leq 0{,}31)$$




Banaketaren taulan $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$ bilatuko dugu:

$\boldsymbol{P(Z \leq 0,31) = 0,6217 = \%\, 62,17}$

**Beraz, gutxi gorabehera ikasleen % 62,17k lortu du gai kalifikazioa azterketan.**

**B.4** *Populazio baten proportziorako konfiantza-tartea eta errore maximo onargarria kalkulatzea.*

**a)** Zenbatetsi gurasoekin bizi diren 25 urteko euskal gazteen populazioaren portzentajea % 95eko konfiantza-mailaz.

- Laginaren tamaina handia baldin bada, hau da lagin-proportzioen banaketa:

$$\mathcal{N}\left(\mu = p,\ \ \sigma = \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$$

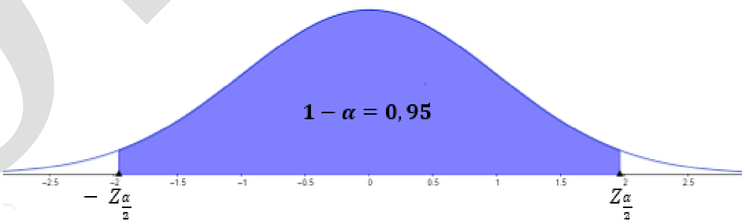
- Hogeita bost urteko 1000 euskal gazteren laginean, 860 gazte gurasoekin bizi dira; beraz:

$$\boldsymbol{\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86}$$

hori da gurasoekin bizi diren 25 urteko euskal gazteen lagin-proportzioa**.**

- Populazioaren proportziorako konfiantza-tartea, % 95eko konfiantza-mailaz, hau izango da:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\ ;\ \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$$




- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ : kalkulatuko dugu:

Konfiantza-maila: $n_c = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \ \Rightarrow \ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \ \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,975 \Rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

- $\hat{q}$ kalkulatuko dugu:

$$\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,14$$

- Orduan:

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}86\cdot 0{,}14}{1000}} = 0{,}01097$$

- Beraz, populazio- proportziorako konfiantza-tartea, % 95eko konfiantza-mailaz, hau izango da:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\ ;\ \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (0{,}86 - 1{,}96\cdot 0{,}01097;\ \ 0{,}86 + 1{,}96\cdot 0{,}01097\ ) =$$

$$= (\mathbf{0{,}8385};\ \ \mathbf{0{,}8815}\ )$$

**Hau da, gurasoekin bizi diren 25 urteko euskal gazteen portzentajea % 83,85 eta % 88,15 artean dago, % 95eko konfiantza-mailaz.**

**b)** Aipatutako konfiantza-mailarako egindako errore maximo onargarria.

Proportzioa zenbatestean, errore maximo onargarria konfiantza-tartearen zabaleraren erdia da; hau da:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

Beraz:

$$e_m = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96 \cdot 0{,}01097 = \frac{0{,}8815 - 0{,}8385}{2} = \mathbf{0{,}0215} \Rightarrow \boldsymbol{e_m} = \%\,\mathbf{2{,}15}$$

**c)** Lortutako emaitzak azaltzea.

**Esan daiteke, % 95eko konfiantza-mailaz, gurasoekin bizi diren 25 urteko euskal gazteen populazioaren portzentajea % 83,85 baino handiagoa eta % 88,15 baino txikiagoa dela, eta dagokion errore maximoa % 2,15 da.**