Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II

USE 2024

www.ehu.eus

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

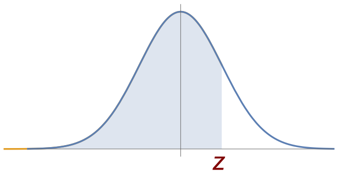
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2024ko OHIKOA

ORDINARIA 2024

MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0’00	0’01	0’02	0’03	0’04	0’05	0’06	0’07	0’08	0’09
0’0	0’5000	0’5040	0’5080	0’5120	0’5160	0’5199	0’5239	0’5279	0’5319	0’5359
0’1	0’5398	0’5438	0’5478	0’5517	0’5557	0’5596	0’5636	0’5675	0’5714	0’5753
0’2	0’5793	0’5832	0’5871	0’5910	0’5948	0’5987	0’6026	0’6064	0’6103	0’6141
0’3	0’6179	0’6217	0’6255	0’6293	0’6331	0’6368	0’6406	0’6443	0’6480	0’6517
0’4	0’6554	0’6591	0’6628	0’6664	0’6700	0’6736	0’6772	0’6808	0’6844	0’6879
0’5	0’6915	0’6950	0’6985	0’7019	0’7054	0’7088	0’7123	0’7157	0’7190	0’7224
0’6	0’7257	0’7291	0’7324	0’7357	0’7389	0’7422	0’7454	0’7486	0’7517	0’7549
0’7	0’7580	0’7611	0’7642	0’7673	0’7704	0’7734	0’7764	0’7794	0’7823	0’7852
0’8	0’7881	0’7910	0’7939	0’7967	0’7995	0’8023	0’8051	0’8078	0’8106	0’8133
0’9	0’8159	0’8186	0’8212	0’8238	0’8264	0’8289	0’8315	0’8340	0’8365	0’8389
1’0	0’8413	0’8438	0’8461	0’8485	0’8508	0’8531	0’8554	0’8577	0’8599	0’8621
1’1	0’8643	0’8665	0’8686	0’8708	0’8729	0’8749	0’8770	0’8790	0’8810	0’8830
1’2	0’8849	0’8869	0’8888	0’8907	0’8925	0’8944	0’8962	0’8980	0’8997	0’9015
1’3	0’9032	0’9049	0’9066	0’9082	0’9099	0’9115	0’9131	0’9147	0’9162	0’9177
1’4	0’9192	0’9207	0’9222	0’9236	0’9251	0’9265	0’9279	0’9292	0’9306	0’9319
1’5	0’9332	0’9345	0’9357	0’9370	0’9382	0’9394	0’9406	0’9418	0’9429	0’9441
1’6	0’9452	0’9463	0’9474	0’9484	0’9495	0’9505	0’9515	0’9525	0’9535	0’9545
1’7	0’9554	0’9564	0’9573	0’9582	0’9591	0’9599	0’9608	0’9616	0’9625	0’9633
1’8	0’9641	0’9649	0’9656	0’9664	0’9671	0’9678	0’9686	0’9693	0’9699	0’9706
1’9	0’9713	0’9719	0’9726	0’9732	0’9738	0’9744	0’9750	0’9756	0’9761	0’9767
2’0	0’9772	0’9778	0’9783	0’9788	0’9793	0’9798	0’9803	0’9808	0’9812	0’9817
2’1	0’9821	0’9826	0’9830	0’9834	0’9838	0’9842	0’9846	0’9850	0’9854	0’9857
2’2	0’9861	0’9864	0’9868	0’9871	0’9875	0’9878	0’9881	0’9884	0’9887	0’9890
2’3	0’9893	0’9896	0’9898	0’9901	0’9904	0’9906	0’9909	0’9911	0’9913	0’9916
2’4	0’9918	0’9920	0’9922	0’9925	0’9927	0’9929	0’9931	0’9932	0’9934	0’9936
2’5	0’9938	0’9940	0’9941	0’9943	0’9945	0’9946	0’9948	0’9949	0’9951	0’9952
2’6	0’9953	0’9955	0’9956	0’9957	0’9959	0’9960	0’9961	0’9962	0’9963	0’9964
2’7	0’9965	0’9966	0’9967	0’9968	0’9969	0’9970	0’9971	0’9972	0’9973	0’9974
2’8	0’9974	0’9975	0’9976	0’9977	0’9977	0’9978	0’9979	0’9979	0’9980	0’9981
2’9	0’9981	0’9982	0’9982	0’9983	0’9984	0’9984	0’9985	0’9985	0’9986	0’9986
3’0	0’9987	0’9987	0’9987	0’9988	0’9988	0’9989	0’9989	0’9989	0’9990	0’9990
3’1	0’9990	0’9991	0’9991	0’9991	0’9992	0’9992	0’9992	0’9992	0’9993	0’9993
3’2	0’9993	0’9993	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9994	0’9995	0’9995	0’9995
3’3	0’9995	0’9995	0’9995	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9996	0’9997
3’4	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9997	0’9998
3’5	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998	0’9998
3’6	0’9998	0’9998	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’7	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’8	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999	0’9999
3’9	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000	1’0000

LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

(2 p) Eztabaidatu honako sistema honen soluzioaren existentzia α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2, \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1, \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1. \end{cases}$$

(0,5 p) Ebatzi sistema, ahal bada, $\alpha = 1$ kasuan.

B1 Ariketa

Jakina da

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2$$

dela. Kalkulatu, erabilitako propietateak azalduz,

(a) **(1,5 p)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$, (b) **(1 p)** $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$.

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bitez honako zuzen hauek:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Kalkulatu r eta s zuzenen posizio erlatiboa.

(b) **(0,75 p)** Kalkulatu zuzen biak barnean dituen planoaren ekuazioa.

(c) **(0,75 p)** $P(-8, -8, 0)$ puntua emanda, kalkulatu r zuzenaren Q puntua $\overrightarrow{PQ}$ bektorea r zuzenarekiko perpendikularra izateko.

B2 Ariketa

$P_1(1,4,5)$, $P_2(1,2,-1)$, $P_3(0,-2,3)$ eta $P_4(-2,0,1)$ puntuak emanda, kalkulatu:

(a) **(1 p)** P_2, P_3 eta P_4 puntuak barnean dituen π planoaren ekuazioa;

(b) **(1,5 p)** P_1 puntuaren π planoarekiko puntu simetrikoa.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

(a) **(0,5 p)** Aurkitu f-ren asintotak.

(b) **(1 p)** Kalkulatu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

(c) **(0,5 p)** Aurkitu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 0$ abszisa duen puntuan.

(d) **(0,5 p)** Egin f funtzioaren grafikoaren gutxi gorabeherako irudikapena.

B3 Ariketa

Jakina da $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ funtzioak mutur erlatibo bat duela $x = 1/2$ denean eta f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 1$ abszisa duen puntuan $y = 6x - 2$ dela.

(a) **(1,5 p)** Aurkitu A, B eta C parametroen balioak.

(b) **(1 p)** Aurkitu f funtzioaren mutur erlatibo guztiak eta arrazoitu maximoak edo minimoak diren.

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Kalkulatu honako bi integral hauek:

(a) **(1,25 p)** $\displaystyle\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}\,dx$, (b) **(1,25 p)** $\displaystyle\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}\,dx$.

B4 Ariketa

Izan bitez $y = x^2$ eta $y = \dfrac{x^2}{3}$ ekuazioetako kurbak eta $y = x$ ekuazioko zuzena.

(a) **(1,25 p)** Marraztu hiru kurba horiek lehen koadrantean mugatzen duten eremua.

(b) **(1,25 p)** Kalkulatu eremu horren azalera.

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Bi kutxa ditugu koloredun bolatxoekin. A kutxak 3 bola berde, 5 bola gorri eta 4 bola urdin ditu. B kutxak 2 bola berde, 2 bola gorri eta 3 bola urdin ditu. Ausaz A kutxatik bola bat ateratzen da eta B kutxan sartzen da. Gero, B kutxatik bola bat ateratzen da.

(a) **(0,5 p)** Egin dagokion zuhaitz diagrama.

(b) **(0,75 p)** Kalkulatu B kutxatik ateratako bola berdea izateko probabilitatea.

(c) **(0,5 p)** Kalkulatu B kutxatik ateratako bola berdea izateko probabilitatea, jakinik A kutxatik ateratako bola gorria izan dela.

(d) **(0,75 p)** Jakinik B kutxatik ateratako bola berdea izan dela, kalkulatu A kutxatik ateratako bola gorria izateko probabilitatea.

B5 Ariketa

Azterketa bat egin ondoren, ondorioztatu da heldu batek ur azpian batez beste 45 segundo ematen dituela arnasa hartu gabe, 7,3 segundoko desbideratze tipikoarekin, eta datuak banaketa normal bati egokitzen zaizkiola.

(a) **(1p)** Kalkulatu 57 segundo baino gehiago irauten duten helduen ehunekoa.

(b) **(1,5p)** Kalkulatu 39 eta 57 segundo bitartean irauten duten helduen ehunekoa.

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 punturen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A1.

- Matrizearen determinantea kalkulatzea eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = -1$ kasua eztabaidatzea (0,5 puntu).
- $\alpha = 3$ kasua eztabaidatzea (0,5 puntu).
- $\alpha = 1$ kasua ebaztea (0,5 puntu).

B1.

- (a) ataleko determinantea kalkulatzeko jarraitutako prozedura azaltzea (1 puntu).
- (a) ataleko determinantea zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- (b) ataleko determinantea kalkulatzeko jarraitutako prozedura azaltzea (0,5 puntu).
- (b) ataleko determinantea zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).

A2.

- Zuzenak paraleloak ez direla egiaztatzea (0,5 puntu).
- Zuzenek elkar ebakitzen dutela egiaztatzea (0,5 puntu).
- (b) ataleko planoaren ekuazioa kalkulatzea (0,75 puntu).
- Q puntua zuzen kalkulatzea (0,75 puntu).

B2.

- (a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- π planoarekiko perpendikularra den eta P_1 puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa kalkulatzea (0,5 puntu).
- P_1 puntuaren puntu simetrikoa kalkulatzea (1 puntu).

A3.

- (a) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- (c) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- (d) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).

B3.

- A, B eta C parametroek bete behar dituzten ekuazioak zuzen idaztea (1 puntu).
- A, B eta C parametroen balioak kalkulatzea (0,5 puntu).
- Mutur erlatiboak aurkitzea eta sailkatzea (1 puntu).

A4.

- Lehen integrala zuzen kalkulatzea (1,25 puntu).
- Bigarren integrala zuzen kalkulatzea (1,25 puntu).

B4.

- Kurben ebaki-puntuak kalkulatzea (0,75 puntu).
- Eskatutako eremua ondo marraztea. (0,5 puntu).
- Eremuaren azalera zuzen kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).

A5.

- (a) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (0,75 puntu).
- (c) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).
- (d) atala zuzen ebaztea (0,75 puntu).

B5.

- (a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (1,5 puntu).

ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Koefizienteen matrizearen determinantea $(\alpha-3)(\alpha+1)$ da. Orduan, $\alpha \neq 3$ eta $\alpha \neq -1$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$\alpha = 3$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta baita ere matrize zabalduarena; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da.

$\alpha = -1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena, 3; beraz, sistema BATERAEZINA da.

$\alpha = 1$ denean, sistemaren soluzioa $x = 2$, $y = -3/2$, $z = 3/2$ da.

B1 EBAZPENA

(a) Errenkada baten elementu guztiak konstante batez biderkatzen badira, determinantea ere konstante horretaz biderkatuta geratzen da; beraz,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -p & -q & -r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -4.$$

Errenkada bati beste errenkada baten multiplo bat batzeak ez du determinantearen balioa aldatzen; beraz,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -p & -q & -r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -4.$$

Berriro aipatu den lehen propietatea erabiliz,

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = -12.$$

(b) Matrize baten determinantea eta haren irauliarena berdinak dira; beraz,

$$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2.$$

Bi zutabe elkar trukatzeak determinantearen zeinua aldatzen du; beraz,

$$\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = -2.$$

Zutabe baten elementu guztiak konstante batez biderkatzen badira, determinantea ere konstante horretaz biderkatuta geratzen da; beraz,

$$\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = -4.$$

A2 EBAZPENA

(a) r zuzenaren norabide-bektorea $\vec{v}_r = (2, 4, -1)$ da, eta s zuzenaren norabide-bektorea $\vec{v}_s = (2, -1, 0) \times (0, 0, 1) = (-1, -2, 0)$ da. $\vec{v}_r$ eta $\vec{v}_s$ paraleloak ez direnez, zuzenek elkar ebakitzen dute edo gurutzatzen dira.

r zuzenaren puntu bat, $P_r(0, -1, 2)$, eta s zuzenaren puntu bat, adibidez $P_s(0, -1, 3)$, hartzen ditugu. $\det(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = 0$ denez, zuzenek elkar ebakitzen dute.

Beste aukera bat zuzenen ebaki-puntua aurkitzea da, $(-2, -5, 3)$ puntua.

(b) r eta s barnean dituen planoaren bektore normala $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-2, 1, 0)$ bektorearekiko proportzionala da, eta plano horren puntu bat $P_r(0, -1, 2)$ da, adibidez. Bilatzen den planoaren ekuazioa $2x - y - 1 = 0$ da.

(c) Q puntua r zuzenean dagoenez, $(2\lambda, -1 + 4\lambda, 2 - \lambda)$ motakoa da. $\overrightarrow{PQ}$ eta $\vec{v}_r$ perpendikularrak direnez, bien arteko biderkadura eskalarrak nulua izan behar du. Hortik, $\lambda = -2$ lortzen da, hau da, $Q = (-4, -9, 4)$.

B2 EBAZPENA

(a) π planoaren bektore normala $\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4} = (0, -10, -10)$ bektorearekiko proportzionala da, eta P_2 puntua π planoaren puntu bat da; beraz, bilatzen den planoaren ekuazioa $y + z - 1 = 0$ da.

(b) π planoarekiko perpendikularra den eta P_1 puntutik pasatzen den r zuzenaren norabide-bektorea π planoaren bektore normal bat da; adibidez, $\vec{v} = (0, 1, 1)$. r zuzenaren ekuazioa honako hau da:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4 + \lambda, \\ z = 5 + \lambda. \end{cases}$$

r zuzenaren eta π planoaren ebaki-puntua $M(1, 0, 1)$ da. P_1' puntua P_1 puntuaren π planoarekiko simetrikoa bada, M puntua P_1 eta P_1' puntuen erdipuntua da; beraz, $P_1'(1, -4, -3)$.

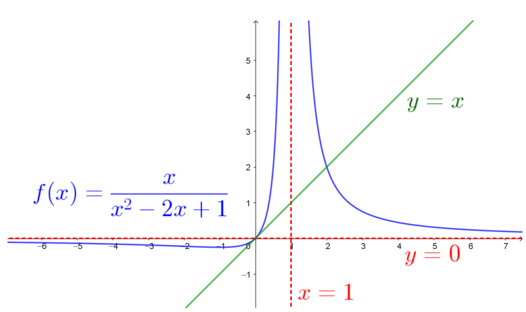
A3 EBAZPENA

(a) f-k asintota bertikal bat du, $x = 1$; eta $y = 0$ asintota horizontala da $-\infty$-n eta $+\infty$-n.

(b) $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x-1)^4} = -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ denez, f beherakorra da $(-\infty, -1)$ eta $(1, +\infty)$ tarteetan, eta gorakorra da $(-1, 1)$ tartean.

(c) $f(0) = 0$ eta $f'(0) = 1$ direnez, f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 0$ abszisa duen puntuan $y = x$ da.

(d) Hau da f-ren adierazpen grafikoa:



B3 EBAZPENA

(a) $f'(x) = 4Ax^3 + 2Bx$ da, eta f-k $x = 1/2$ puntuan mutur erlatibo bat izan dezan $f'(1/2) = 0$ bete behar da; beraz $\dfrac{A}{2} + B = 0$. Bestalde, f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 1$ abszisa duen puntuan $y = 6x - 2$ izan dadin $f(1) = 4$ eta $f'(1) = 6$ bete behar da, hau da, $A + B + C = 4$ eta $4A + 2B = 6$. Hiru ekuazio horiek osatzen duten sistema ebatziz, $A = 2$, $B = -1$ eta $C = 3$ direla lortzen da, hots, $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$.

(b) $f'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(2x-1)(2x+1)$ eta $f''(x) = 24x^2 - 2$ dira. Beraz, $f'(x) = 0$ da baldin eta $x = 0$, $x = -1/2$ edo $x = 1/2$ bada. $f''(0) < 0$ eta $f''(1/2) = f''(-1/2) > 0$ direnez, f-k maximo erlatibo bat du $x = 0$ puntuan, $f(0) = 3$; eta minimo erlatiboak $x = 1/2$ eta $x = -1/2$ puntuetan, $f(1/2) = f(-1/2) = 23/8$.

A4 EBAZPENA

(a) Polinomioen arteko zatiketa eginez,

$$\frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \frac{4}{(x+1)^2};$$

beraz,

$$\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1}\, dx = \int \Big(x - 2 + \frac{4}{(x+1)^2} \Big)\, dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{4}{x+1} + k.$$

(b) Integrakizunaren frakzio sinpleetako deskonposizioa honako hau da:

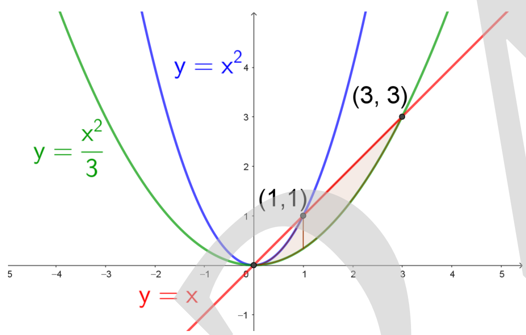
$$\frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{5}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1};$$

beraz,

$$\int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1}\, dx = 5 \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 3 \int \frac{dx}{x+1} = -\frac{5}{x+1} - 3 \ln |x+1| + k.$$

B4 EBAZPENA

$y = x^2$ ekuazioko parabolak eta $y = x$ ekuazioko zuzenak $x = 0$ eta $x = 1$ denean elkar ebakitzen dute. Aldiz, $y = x^2/3$ ekuazioko parabolak eta $y = x$ ekuazioko zuzenak $x = 0$ eta $x = 3$ denean elkar ebakitzen dute. Hiru kurbek lehen koadrantean mugatzen duten eremua honako hau da:

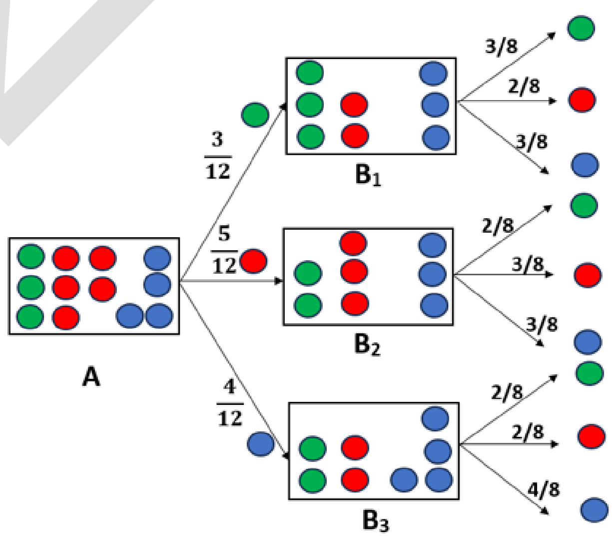


Eremu horren azalera hau da:

$$A = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{3}\right) dx + \int_1^3 \left(x - \frac{x^2}{3}\right) dx = \frac{4}{3}u^2.$$

A5 EBAZPENA

(a) Honako hau da zuhaitz-diagrama:



(b) $$\begin{aligned} P(\text{B-tik berdea}) &= P(\text{A-tik berdea})P(\text{B-tik berdea | A-tik berdea}) \\ &\quad + P(\text{A-tik gorria})P(\text{B-tik berdea | A-tik gorria}) \\ &\quad + P(\text{A-tik urdina})P(\text{B-tik berdea | A-tik urdina}) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} + \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{32}. \end{aligned}$$

(c) $P(\text{B-tik berdea | A-tik gorria}) = \dfrac{1}{4}$.

(d) $P(\text{A-tik gorria | B-tik berdea})$

$$= \frac{P(\text{A-tik gorria})P(\text{B-tik berdea | A-tik gorria})}{P(\text{B-tik berdea})} = \frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{9}{32}} = \frac{10}{27}.$$

B5 EBAZPENA ”Heldu batek ur azpian, arnasa hartu gabe, eman dezakeen denbora” aldagaiak, X-k, $N(45; 7{,}3)$ banaketa normal bati jarraitzen dio.

(a) $P(X > 57) = P\Big(Z > \dfrac{57-45}{7{,}3}\Big) = P(Z > 1{,}64) = 1 - P(Z \leq 1{,}64)$
$= 1 - 0{,}9495 = 0{,}0505$.

Beraz, helduen % 5,05ek 57 segundo baino gehiago irauten du.

(b) $P(39 < X < 57) = P\big(\dfrac{39-45}{7{,}3} < Z < \dfrac{57-45}{7{,}3}\big) = P(-0{,}82 < Z < 1{,}64)$
$= P(Z < 1{,}64) + P(Z < 0{,}82) - 1 = 0{,}7434$.

Beraz, helduen % 74,34k 39 eta 57 segundo bitartean irauten du.