Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

EAU 2024

www.ehu.eus

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2024ko EZOHIKOA	*EXTRAORDINARIA 2024*
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II***

- ***Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques.***
  De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.
- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de trasmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

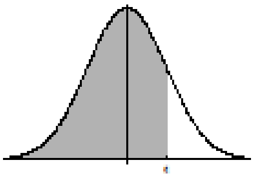
2024ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno.

La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo.

a) $[\![2,2\ puntos]\!]$ ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

b) $[\![0,3\ puntos]\!]$ ¿Cuál sería dicho ingreso?

B.1 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

a) $[\![1,25\ puntos]\!]$ Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $[\![1,25\ puntos]\!]$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

a) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Sea la función $f(x) = a\,x^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1\,,\ \ -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) $[\![\mathbf{1}\ \boldsymbol{punto}]\!]$ Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

c) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Calcula el área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abcisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

B.2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión:

$$f(x) = 40 - 6x + x^2 \text{ , para } x \geq 0$$

donde "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Disminuye el coste alguna vez?

b) $[\![\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

c) $[\![\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

d) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Si el coste fuera 80.000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?

e) $[\![\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Representa gráficamente la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Sabemos que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Sabemos que $P(C) = 0{,}5$; $P(D) = 0{,}6$ y $P(C \cup D) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Sabemos que $P(A) = 0{,}4$; $P(E) = 0{,}6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

B.3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.

b) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

2024ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4 $\llbracket \boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos} \rrbracket$

En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) $\llbracket \boldsymbol{1\ punto} \rrbracket$ Obtén el intervalo característico para el 80%.

b) $\llbracket \boldsymbol{0,3\ puntos} \rrbracket$ ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

c) $\llbracket \boldsymbol{0,8\ puntos} \rrbracket$ ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

d) $\llbracket \boldsymbol{0,4\ puntos} \rrbracket$ Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

B.4 $\llbracket \boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos} \rrbracket$

Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 98\ puntos \ \text{ y } \ s = 15\ puntos.$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:

“El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos”.

¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen está compuesto de ocho ejercicios distribuidos en cuatro bloques**.**
2. ***De estos ocho ejercicios se tiene que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.***
3. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
4. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
5. Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.
6. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, …, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

BLOQUE: ÁLGEBRA

Problema A.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 2,2 puntos.

- Concretar la función objetivo, **0,1 puntos.**
- Determinar las restricciones, **0,2 puntos.**
- Determinar y representar la región factible.
  - Representación de cada restricción, 0,1 puntos, por lo tanto, **0,3 puntos.**
  - Determinar la región factible, **0,5 puntos.**
- Concretar los vértices de la región factible.
  - Vértice A, **0,1 puntos.**
  - Vértice B, **0,125 puntos.**
  - Vértice C, **0,125 puntos.**
  - Vértice D, **0,125 puntos.**
  - Vértice E, **0,125 puntos.**
- Valorar la función en los vértices, **0,4 puntos.**
- Determinar el máximo, **0,1 puntos.**

b. 0,3 puntos.

- Valorar la función en ese punto máximo, **0,3 puntos.**

Problema B.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1,25 puntos.

- Determina el sistema de ecuaciones, **0,5 puntos.**
- Resuelve el sistema de ecuaciones, **0,75 puntos.**

b. 1,25 puntos.

- Cálculo de A^t, **0,2 puntos.**
- Cálculo de la matriz inversa de la matriz A:
  - Determinar la formula de la matriz inversa de A, **0,15 puntos.**
  - Cálculo del determinante de la matriz A, **0,15 puntos.**
  - Adjunto de la matriz A , **0,4 puntos.**
  - Inversa de la matriz A, **0,15 puntos.**
- Cálculo de la matriz M, **0,2 puntos.**

BLOQUE: ANÁLISIS

Problema A.2 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,75 puntos.

- El punto $(1,\ -3)$ es un punto de la función, **0,2 puntos.**
- Cálculo de la primera y la segunda derivada, **0,2 puntos.**
- El punto $x = -1$ es un punto de inflexión, **0,2 puntos.**
- Resolver el sistema que se crea, **0,15 puntos.**

b. 1 punto.

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
  - Análisis de los signos de la primera derivada, **0,3 puntos**.
  - Determinar los intervalos, **0,2 puntos**.
- Máximos y mínimos relativos de la función.
  - Expresar qué son los máximos y mínimos relativos, **0,2 puntos**.
  - Concretar el máximo relativo, **0,15 puntos.**
  - Concretar el mínimo relativo, **0,15 puntos.**

c. 0,75 puntos.

- Representación gráfica, **0,2 puntos.**
- Cálculo de la integral definida.
  - Determinar la integral a calcular, **0,1 puntos.**
  - Cálculo de la integral indefinida, **0,15 puntos.**
  - Aplicar Barrow, **0,2 puntos.**
  - Determinar el área**, 0,1 puntos.**

Problema B.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 0,75 puntos.
- Concretar que se tiene que analizar la monotonía de la función, **0,25 puntos.**
- Cálculo de $f'(x)$, **0,1 puntos.**
- Análisis del signo de la primera derivada, **0,25 puntos.**
- Determinar cuántas unidades se tienen que producir para disminuir el coste, **0,15 puntos.**

b. 0,5 puntos.
- Determinar en qué punto se consigue el mínimo de la función $f(x)$, **0,25 puntos.**
- Determinar el coste mínimo, **0,25 puntos.**

c. 0,25 puntos.
- Determinar que cuando no se produce nada, $x = 0$, **0,1 puntos.**
- Concretar el coste, **0,15 puntos.**

d. 0,75 puntos.
- Determinar el valor del coste, **0,25 puntos**.
- Solucionar la ecuación de segundo grado, **0,25 puntos.**
- Determinar que es una solución única, **0,25 puntos.**

e. 0,25 puntos.
- Representación gráfica de la función $f(x)$, **0,25 puntos.**

BLOQUE: PROBABILIDAD

Problema A.3 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,75 puntos.

- Hacer un diagrama de Venn o algún esquema, **0,25 puntos**.
- Indicar la fórmula $P(A \cap B)$, **0,25 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,25 puntos.**

b. 1 punto.

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,25 puntos.**
- Determinar qué tiene que calcular, **0,25 puntos.**
- Indicar la fórmula $P(C \mid D)$, **0,25 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,25 puntos.**

c. 0,75 puntos.

- Expresar qué quiere decir que dos sucesos son independientes, **0,2 puntos.**
- Determinar qué tiene que calcular, **0,15 puntos.**
- Indicar la fórmula $P(E \cup A)$, **0,15 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,25 puntos.**

Problema B.3 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,5 puntos.

- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,25 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,25 puntos.**

b. 1,25 puntos.

- Determinar qué tiene que calcular, **0,25 puntos.**
- Indicar la probabilidad total del suceso a calcular o su fórmula, **0,5 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

c. 0,75 puntos.

- Determinar qué tiene que calcular, **0,15 puntos.**
- Indicar la probabilidad a posteriori, el teorema de Bayes, **0,3 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,3 puntos.**

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema A.4 *(hasta 2,5 puntos)*

a. **1 punto.**
   - Expresar cómo se determina el intervalo característico, **0,25 puntos.**
   - Tipificación de la variable, **0,25 puntos.**
   - Determinar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,15 puntos.**
   - Concretar el intervalo característico, **0,35 puntos.**

b. **0,3 puntos.**
   - Determinar la probabilidad $P(X \geq 228)$, **0,3 puntos.**

c. **0,8 puntos.**
   - Determinar la probabilidad $P(X \leq 210)$, **0,35 puntos.**
   - Determinar la probabilidad $P(X \leq 200)$, **0,35 puntos.**
   - Cálculo de la probabilidad pedida, **0,1 puntos.**

d. **0,4 puntos.**
   - Distribución de la media muestral, **0,2 puntos.**
   - Cálculo de la probabilidad $P(\bar{X} \leq 207)$, **0,2 puntos.**

Problema B.4 *(hasta 2,5 puntos)*

- Concretar qué es el nivel de confianza, **0,2 puntos.**
- Indicar la fórmula del error máximo admisible, **0,2 puntos.**
- Concretar el error máximo admisible **0,3 puntos.**
- Conseguir $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,75 puntos.**
- Conseguir $\frac{\alpha}{2}$, **0,75 puntos.**
- Determinar el nivel de confianza, **0,3 puntos.**

SOLUCIONES

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1 *Resolución de un problema de programación lineal con dos variables:*

a) Número de relojes para obtener el máximo ingreso.

	Nº de relojes	**Precio (€)**	**Cantidad**
Pulsera	x	90 €	$0 \leq x \leq 800$
Bolsillo	y	120 €	$0 \leq x \leq 600$

- La función objetivo es: $f(x, y) = 90\,x + 120\,y$

- Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1000 \\ x \leq 800 \\ y \leq 600 \end{cases}$

- En el plano XY, la región factible es:

- Cálculo del vértice C:

$$\begin{cases} x+y=1000 \\ y=600 \end{cases} \Rightarrow x+600=1000 \Rightarrow \begin{matrix} x=400 \\ y=600 \end{matrix}$$

- Cálculo del vértice D:

$$\begin{cases} x+y=1000 \\ x=800 \end{cases} \Rightarrow 800+y=1000 \Rightarrow \begin{matrix} x=800 \\ y=200 \end{matrix}$$

Por lo tanto, los vértices son:

$A(0,0)$, $B(0,600)$, $C(400,600)$, $D(800,200)$, $E(800,0)$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$f(A)=f(0,0)=0$

$f(B)=f(0,600)=72.000$

$f(C)=f(400,600)=108.000$

$f(D)=f(800,200)=96.000$

$f(E)=f(800,0)=72.000$

- El valor máximo de la función se obtiene en el punto $\boldsymbol{C(400,\ 600)}$ y, por lo tanto, el número de relojes que se tienen que producir es **400 de pulsera y 600 de bolsillo** para obtener el máximo ingreso.

b) El ingreso máximo.

$f(x,y)=f(C)=f(400,600)=90\cdot 400+120\cdot 600=$ **108.000 €**.

De esta manera se obtendrá el ingreso máximo de **108.000 €**.

B.1 *Cálculo matricial. Propiedades de las matrices. Resolución de una ecuación matricial.*

a) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y+2-4x=-1 \\ 2y+2x+2+2=2 \Rightarrow \\ 2+z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ 2x+2y=-2 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ x+y=-1 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+3y=-3 \\ x=-1-y \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4(-1-y)+3y=-3 \\ x=-1-y \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow 4+4y+3y=-3 \Rightarrow y=-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=-1} \Rightarrow \\ \boldsymbol{z=-2} \end{cases}$$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ calcula:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

- $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$
- $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$
- $M = A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5/2} & \mathbf{-1/2} \end{pmatrix}$$

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2 *Problema de análisis de una función. Cálculo de máximos, mínimos, puntos de inflexión y representación gráfica. Cálculo del área.*

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ pase por el punto $(1,\ -3\ )$ y tenga un punto de inflexión en $x = -1$.

$$f(x) = a\,x^3 + 3\,x^2 - 5x + b$$

- $f(x)$ pasa por el punto el punto $(1, -3\ )$ $\Rightarrow$ $f(1) = -3$

  $\Rightarrow\ a + 3 - 5 + b = -3 \quad \Rightarrow \quad a + b = -1$

- $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $x = -1$

$$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\,x_0, f(x_0)\,) \quad \textit{\textbf{punto de inflexión}}$$

- Por lo tanto, si $x = -1$ punto de inflexión $\Rightarrow \begin{cases} f''(-1\,) = 0 \\ f'''(-1) \neq 0 \end{cases}$
- Calculamos la primera y la segunda derivada de $f(x)$:
  - $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5$
  - $f''(x) = 6ax + 6$
- $f''(-1\,) = 0 \ \Rightarrow\ -6a + 6 = 0\ \Rightarrow a = 1$

Por lo tanto, tenemos el sistema: $\begin{cases} a + b = -1 \\ \quad a = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 1}$ y $\boldsymbol{b = -2}$

b) Monotonía y extremos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3\,x^2 + 7$

- Monotonía de la función $g(x) = x^3 - 3\,x^2 + 7$

$$g'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad g\,(x) \quad \textbf{creciente}$$

$$g'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad g\,(x) \quad \textbf{decreciente}$$

- $g'(x) = 3\,x^2 - 6x = x\,(3x - 6) \ \Rightarrow x\,(3x - 6) = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases}$

  $\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

	$(-\infty\,,\ \ 0)$	$(0\,,\ \ 2)$	$(2\,,\ \ \infty)$
x	<0	>0	>0
$3x-6$	<0	<0	>0
$g'(x)=x\,(3x-6)$	$g'(x)>0$	$g'(x)<0$	$g'(x)>0$

$x=0$ $\qquad x=2$

Por lo tanto:

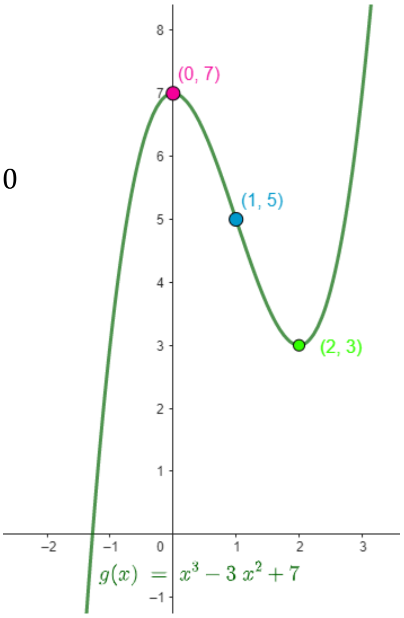
- En los intervalos $(-\infty\,,\ \ \mathbf{0})\cup(\mathbf{2}\,,\ \ \infty)$ $\boldsymbol{g(x)}$ **es creciente**.
- En el intercalo $(\mathbf{0}\,,\ \ \mathbf{2})$ $\boldsymbol{g(x)}$ **es decreciente**.

Extremos relativos de la función $g(x)=x^3-3\,x^2+7$

$$\boxed{g'(x_0)=0 \ \ \wedge \begin{cases} g''(x_0)<0 \ \Rightarrow \ \ x_0 \; máximo\ relativo \\ g''(x_0)>0 \ \Rightarrow \ \ x_0 \; mínimo\ \ relativo \end{cases}}$$

- Calculamos la primera y la segunda derivada de la función $g(x)$
  - $g'(x)=3\,x^2-6x$
  - $g''(x)=6x-6$
- $g'(x)=0 \ \Rightarrow \ 3x^2-6x=0 \ \Rightarrow x\,(3x-6)=0 \ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x-6=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$



- $g''(x)=6\,x-6$
  - $g''(0)=-6<0 \ \Rightarrow \ g(x)$ en el punto $x=0$ tiene un máximo relativo.
  - $g(0)=7$

Entonces ($\mathbf{0},\ \mathbf{7}$) **es máximo relativo**.

- $g''(2)=6>0 \ \Rightarrow \ g(x)$ en el punto $x=2$ tiene un mínimo relativo.
- $g(2)=3$

Entonces $(\mathbf{2},\ \mathbf{3})$ **es mínimo relativo.**

c) Calcula la superficie de la región delimitada por el gráfico de la función $g(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x = 1,\ x = 2$ y haz su representación gráfica.

Para determinar el área hay que calcular la integral definida:

$$A = \int_1^2 [\,(x^3 - 3x^2 + 7) - 0\,]\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\,\frac{x^3}{3} + 7\,x\right]_1^2 =$$

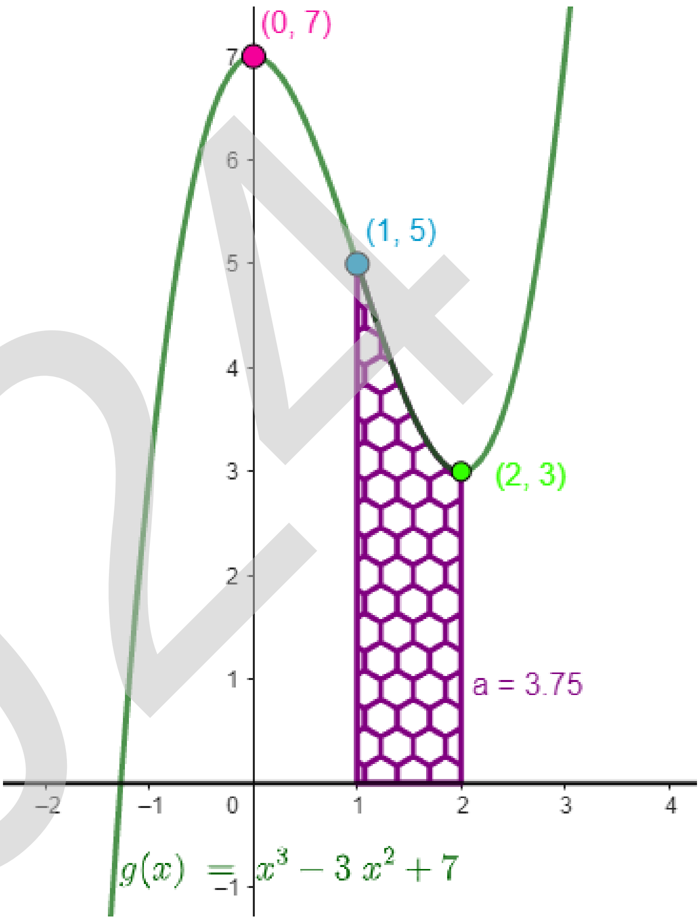
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \,x^3 + 7x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{16}{4} - 8 + 14\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 7\right) =$$

$$= \frac{15}{4}\,u^2 = \ 3{,}75\,u^2$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{A = \frac{15}{4} u^2}$$



B.2 *Problema de análisis de una función. Cálculo de máximos, mínimos relativos, puntos de inflexión, representación gráfica…*

$$f(x) = 40 - 6x + x^2 \text{ , para } x \geq 0,$$

- "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo.
- $f(x)$ es el coste de producción (en miles de euros) de ese artículo.

a) ¿Disminuye el coste alguna vez?

Estudiamos la monotonía de la función $f(x)$

$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ **creciente**

$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ **decreciente**

- Dominio de definición de la función $f(x)$: $(0\ ,\ \ \infty)$
- Calculamos la primera derivada de la función $f(x)$:

$$f'(x) = -6 + 2x = 2\,(-3 + x)$$

- $f'(x) = 0 \Rightarrow -3 + x = 0 \Rightarrow x = 3$
- Estudio del signo de la primera derivada:

	$(0\ ,\ \ 3)$	$(3\ ,\ \ \infty)$
$-3 + x$	< 0	> 0
$f'(x) = 2\,(-3 + x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0\ ,\ \ 3)$, por lo tanto, los costes disminuyen en dicho intervalo.

La función es polinómica, por lo tanto, continua; luego en $x = 3$ la función tiene un mínimo relativo.

En conclusión, **el coste disminuye cuando la cantidad producida del artículo es inferior a 3 unidades**.

b) Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

- El coste es mínimo cuando la cantidad producida es igual a tres, luego cuando $x = 3$.
- $f(3) = 40 - 18 + 9 = 31$

Por lo tanto, el coste mínimo es **31.000 €**.

c) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

- No producir nada de ese artículo significa que $x = 0$.
- $f(0) = 40$

Por lo tanto, el coste de no producir ningún artículo es **40.000 €**

d) Si el coste fuera 80.000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?

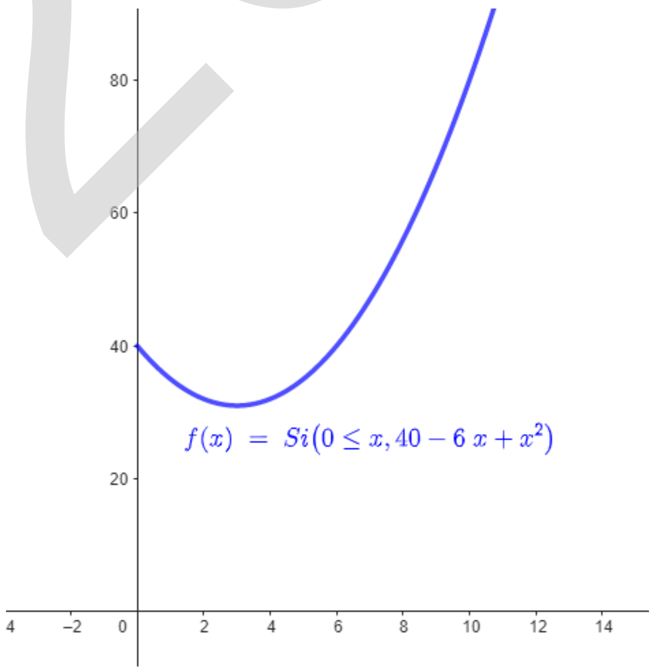
- Si el coste es 80.000 € $\Rightarrow f(x) = 80$
- $f(x) = 40 - 6x + x^2 = 80 \;\Rightarrow\; x^2 - 6x - 40 = 0 \;\Rightarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = \begin{cases} x = 10 \\ x = -4 \end{cases}$$

- $x = 10$ solución única ($x \geq 0$).

Luego si el coste es 80.000 € la cantidad producida es de **10 unidades.**

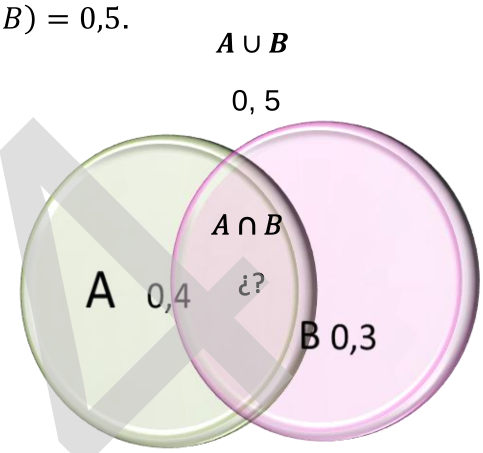
e) Representa gráficamente la función.



BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3 *Problema de cálculo de probabilidades.*

a) Sabemos que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$; $P(A \cup B) = 0{,}5$.



Entonces:

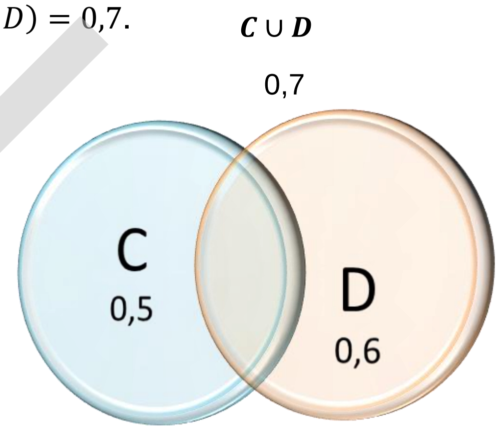
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \Rightarrow$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \ \Rightarrow$

$P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2 \ \Rightarrow$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = 0{,}2}$$

b) Sabemos que $P(C) = 0{,}5$; $P(D) = 0{,}6$; $P(C \cup D) = 0{,}7$.



$$P(C / D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{[P(C) + P(D) - P(C \cup D)]}{P(D)} =$$

$$= \frac{0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}7}{0{,}6} = 0{,}666 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(C / D) = 0{,}666}$$

c) Sabemos que $P(A) = 0{,}4$; $P(E) = 0{,}6$ y que los sucesos E y A son independientes.

- Por ser independientes: $P(E \cap A) = P(E) \cdot P(A)$
- La probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos es la probabilidad de que suceda E o suceda A, es decir, la probabilidad de que suceda $E \cup A$.

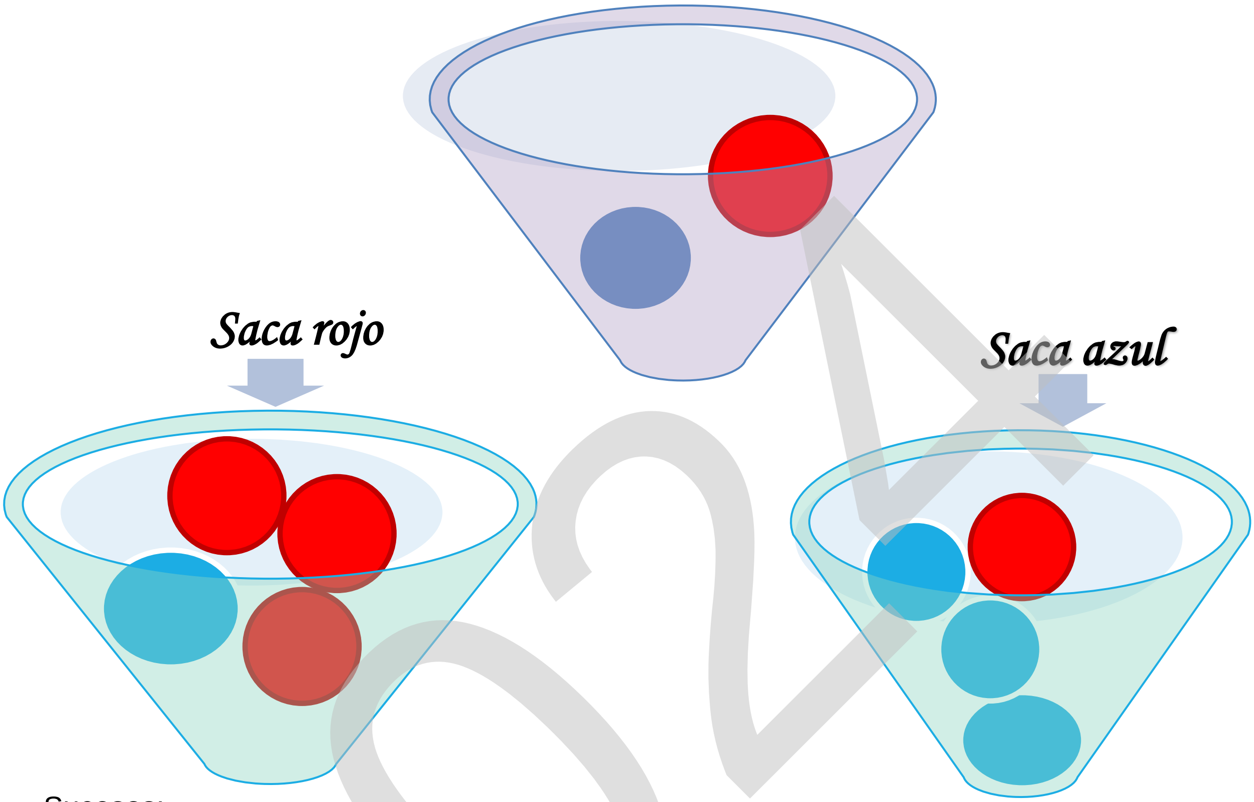
Entonces:

$$P(E \cup A) = P(E) + P(A) - P(E \cap A) = P(E) + P(A) - P(E) \cdot P(A) =$$

$$= 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}76 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(E \cup A) = 0{,}76}$$

B.3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse*, *a través de un diagrama de árbol o a través de la fórmula de la probabilidad total. Teorema de Bayes.*



Sucesos;

A_1 = la primera bola azul $\qquad$ R_1 = la primera bola roja

A_2 = la segunda bola azul $\qquad$ R_2 = la segunda bola roja

a) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul: $P(R_2|A_1)$

$$P(R_2|A_1) = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}} = \mathbf{25}\ \%$$

b) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul: $P(A_2)$

$$P(A_2) = P(R_1)\ P(A_2\,|\,R_1) + P(A_1)\,P(A_2\,|\,A_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}} = \mathbf{50}\ \%$$

c) Si la segunda bola ha sido azul, la probabilidad de que la primera fuera roja: $P(R_1|A_2)$

$$P(R_1\,|\,A_2) = \frac{P(R_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(R_1)\ P(A_2\,|\,R_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}} = \mathbf{25}\ \%$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4 *Comprensión y uso de una distribución Normal, y cálculo de probabilidades.*

a) Intervalo característico para el 80 %.

$$varianza = 144 \;\Rightarrow\; \sigma = \sqrt{144} = 12$$

$$X \equiv tiempo\ diario\ de\ conexión\ \ a\ Internet = \mathcal{N}(\,210\,,\quad \sigma = 12)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(210 - e\,,\quad 210 + e)\ es\ el\ intervalo\ característico\ para\ el\ 80\ \%, \\ si\ \ P(210 - e\ \le\ X \le\ 210\ +\ e\,)\ =\ 0{,}8\end{array}}$$

$$\mathrm{P}(210 - \mathrm{e}\ \le\ \mathrm{X} \le\ 210\ +\ \mathrm{e}\,)\ =\ 0{,}8\ \ \Rightarrow\ \ \mathrm{P}(\mathrm{X}\ \le 210 + \mathrm{e}\,)\ - \mathrm{P}(\,\mathrm{X} \le\ 210\ -\ \mathrm{e}\,)\ \ =\ 0{,}8\ \Rightarrow$$

- TIPIFICACIÓN:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 210}{12} \;\Rightarrow\; X = 12\,Z + 210$$

- $P(X\ \le 210 + e\,) = P(\,12\,Z + 210 \le 210 + e\,) =$

$$= P(12\,Z\ \ \le e\,) = P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)$$

- $P(X\ \le 210 - e\,) = P(\,12\,Z + 210 \le 210 - e\,) =$

$$= P(12\,Z\ \ \le -e\,) = P\left(Z \le \frac{-e}{12}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)$$

$$\Rightarrow\ P\left(Z \le \frac{e}{12}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)\right] = 0{,}8\ \Rightarrow\ 2\,P\left(Z \le \frac{e}{12}\right) - 1 =\ 0{,}8\ \Rightarrow$$

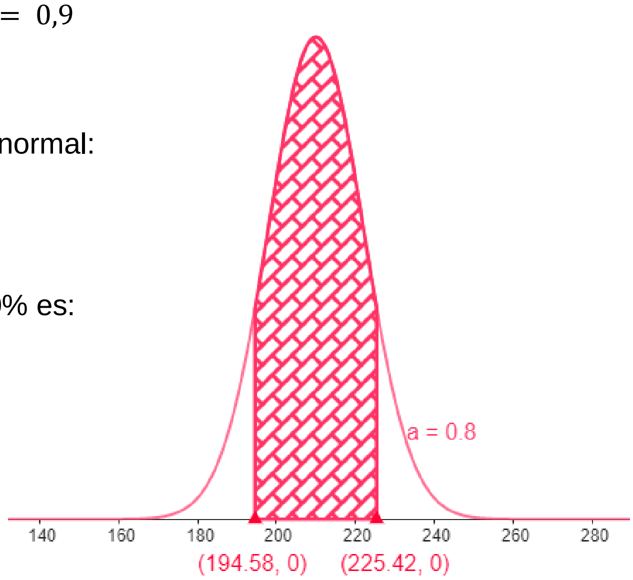
$$P\left(Z \le \frac{e}{12}\right) =\ 0{,}9$$

Entonces, mirando en la tabla de la distribución normal:

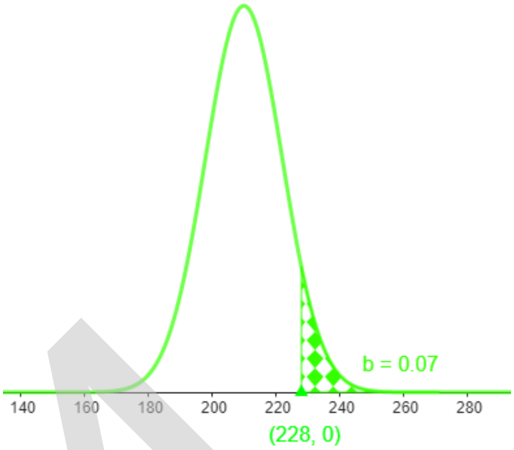
$$\frac{e}{12} = 1{,}285\ \Rightarrow\ \boldsymbol{e = 15{,}42}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 80% es:

$$(210 - \mathrm{e}\,,\quad 210 + e) = (\mathbf{194{,}58}\,;\quad \mathbf{225{,}42})$$



b) $P(X \geq 228)$

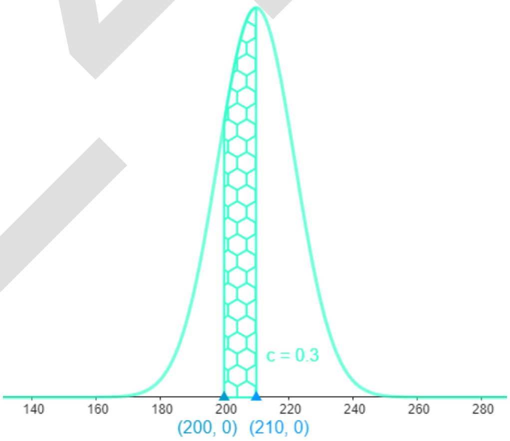


$P(X \geq 228) = P(12\,Z + 210 \geq 228) =$

$= P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 = \ \mathbf{6{,}68}\ \%$

c) $P(200 \leq X \leq 210)$



$P(200 \leq X \leq 210) = P(X \leq 210) - P(X \leq 200)$

- $P(X \leq 210) = P(12\,Z + 210 \leq 210) =$

  $= P(Z \leq 0) = 0{,}5$

- $P(X \leq 200) = P(12\,Z + 210 \leq 200) =$

  $= P(Z \leq -0{,}83) = P(Z \geq 0{,}83) =$

  $= 1 - P(Z \leq 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$

Por lo tanto; $P(200 \leq X \leq 210) = 0{,}5 - 0{,}2033 = 0{,}2967 \ = \ \mathbf{29{,}67}\ \%$

d) Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

- Indicamos cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$:

- $X \equiv \ N\,(210, \quad 12\,) \Rightarrow \bar{X} \equiv \ \mathcal{N}\left(\mu, \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(210, \ \frac{12}{\sqrt{30}}\right) = \mathcal{N}\,(210, \quad 2{,}19\,) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\bar{X} \equiv \mathcal{N}\,(210, \quad 2{,}19\,)}$$

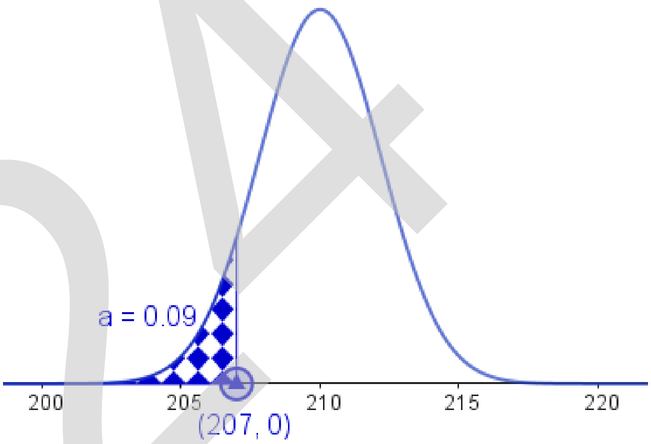
- Calculamos $P(\bar{X} \leq 207)$:

  - Tipificación de la variable $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 210}{2{,}19} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{X} = 2,19\, Z + 210}$$

  - $P(\bar{X} \leq 207) = P(2{,}19\, Z + 210 \leq 207) = P(Z \leq -1{,}37) = P(Z \geq 1{,}37) =$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}37) = 1 - 0{,}9147 = 0{,}0853 = \mathbf{8,53}\ \%$$



Por lo tanto**:**

$\boldsymbol{P(\bar{X} \leq 207) = 0,0853 = 8,53}\ \%$

B.4 *Ejercicio de distribución de la media muestral. Valor de la media muestral y error máximo admisible.*

- En la estimación por intervalo de confianza de la media, conocemos la fórmula del error máximo admisible, que es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  - e_m es la mitad de la amplitud del intervalo. Por lo tanto:

$$e_m = \frac{101{,}5 - 94{,}5}{2} = 3{,}5$$

  - El valor de la desviación típica σ, se estima a partir del valor muestral obtenido, $s = 15$.
  - Sabemos que el tamaño muestral es $n = 100$

Entonces, calculamos el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$:

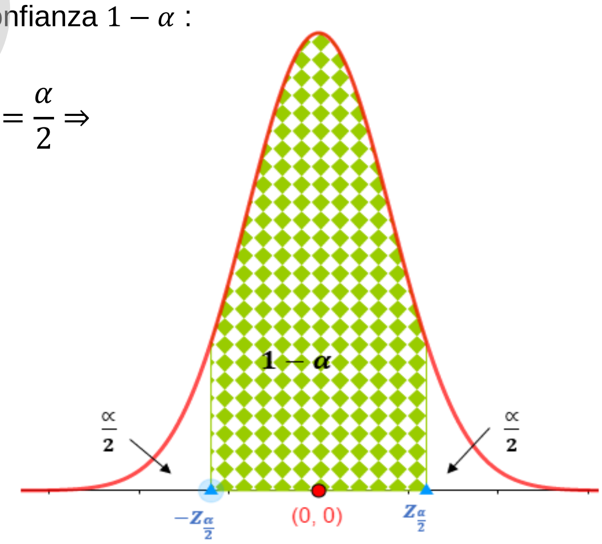
$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3{,}5 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} \Rightarrow 35 = 15 \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$$

- A partir de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, obtenemos el nivel de confianza $1 - \alpha$:

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P(Z \leq 2{,}33) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0{,}9901 = 0{,}0099 = \frac{\alpha}{2}$$



Entonces:

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}0099 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 0{,}0198} \Rightarrow \boldsymbol{1 - \alpha = 0{,}9802}$$

Por lo tanto, **podemos decir con un nivel de confianza del 98,02 %,** que el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 y 101,5 puntos.